

Date : NOM :
Université de Nice
Département de Mathématiques

Prénom :

Groupe :
Année 2012-2013
Licence MASS 2e année

Probabilité
Fiche TD1
Algèbre d'événements et variables aléatoires

Notez vos réponses sur cette feuille qui sera ramassée en fin de séance.

Exercice 1 (Indicatrice) On rappelle qu'on appelle *fonction indicatrice* de $A \subseteq \Omega$ la fonction $\mathbb{I}_A : \Omega \rightarrow \{0, 1\}$ définie par $\mathbb{I}_A(\omega) = 1$ si $\omega \in A$, et $\mathbb{I}_A(\omega) = 0$ sinon.

1. Exprimer, en fonction de $\mathbb{I}_A$ et de $\mathbb{I}_B$, les indicatrices $\mathbb{I}_{A^c}$, $\mathbb{I}_{A \cap B}$, $\mathbb{I}_{A \cup B}$. Soit $B \subseteq \Omega$. Vérifier que $\mathbb{I}_{A \cap B} = \mathbb{I}_A \wedge \mathbb{I}_B$ et $\mathbb{I}_{A \cup B} = \mathbb{I}_A \vee \mathbb{I}_B$ où $x \wedge y := \min\{x, y\}$ et $x \vee y := \max\{x, y\}$. **Indication** : On commencera par remplir le tableau

$\omega \in$	$\mathbb{I}_A$	$\mathbb{I}_B$	$\mathbb{I}_{A^c}$	$\mathbb{I}_{A \cap B}$	$\mathbb{I}_{A \cup B}$	$\mathbb{I}_A \wedge \mathbb{I}_B$	$\mathbb{I}_A \vee \mathbb{I}_B$	$\mathbb{I}_A \cdot \mathbb{I}_B$	$1 - \mathbb{I}_A$
A	1	x	0	x	1	x	1	x	0
A^c	0	x	1	0	x	0	x	0	1
B	x	1	x	x	1	x	1	x	x
B^c	x	0	x	0	x	0	x	0	x
$A \cap B$	1	1	0	1	1	1	1	1	0
$A - B := A \cap B^c$	1	0	0	0	1	0	1	0	0
$B - A := B \cap A^c$	0	1	1	0	1	0	1	0	1
$(A \cup B)^c$	0	0	1	0	0	0	0	0	1

Donnez à présent vos réponses :

En observant les deux premières lignes du tableau vous voyez que $\mathbb{I}_{A^c} = 1 - \mathbb{I}_A$ (* *)

En observant les quatre dernières lignes du tableau vous observez que $\mathbb{I}_{A \cap B} = \mathbb{I}_A \wedge \mathbb{I}_B$

Vous trouvez : $\mathbb{I}_{A \cup B} = \mathbb{I}_A \vee \mathbb{I}_B$ (*)

Indiquez comment vous trouvez cette dernière réponse :

J'observe les quatre dernières lignes du tableau qui envoient tous les $\omega \in \Omega$ et je constate que :
pour tout $\omega \in \Omega$ $\mathbb{I}_{A \cup B}(\omega) = \mathbb{I}_A(\omega) \vee \mathbb{I}_B(\omega) (= (\mathbb{I}_A \vee \mathbb{I}_B)(\omega))$, c'est (*)

En utilisant que $A \cup B = ((A \cup B)^c)^c$, montrez que $\mathbb{I}_{A \cup B} = 1 - (1 - \mathbb{I}_A)(1 - \mathbb{I}_B)$.

$$\begin{aligned} \mathbb{I}_{((A \cup B)^c)^c} &= 1 - \mathbb{I}_{(A \cup B)^c} = 1 - (\mathbb{I}_{A^c \cap B^c}) = 1 - \mathbb{I}_{A^c} \cdot \mathbb{I}_{B^c} \\ &= 1 - (1 - \mathbb{I}_A)(1 - \mathbb{I}_B) \quad (QFD) \end{aligned}$$

2. Soit $X : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$ (on peut aussi dire que X est une *variable aléatoire* (v.a.) sur $(\Omega, \mathcal{P}(\Omega))$). Ecrire chacune des v.a. ci-dessous sous la forme $\mathbb{I}_A$, où A est un nouvel ensemble défini au moyen de X , comme par exemple $A := \{X \leq 1\} := \{\omega \in \Omega \mid X(\omega) \leq 1\}$ (on dit que A est un événement $\alpha(X)$ -mesurable, et que $\mathbb{I}_A$ est une v.a. $\alpha(X)$ -mesurable.)

$$\mathbb{I}_{\{X \leq 2\}} \wedge \mathbb{I}_{\{X \geq -1\}}, \mathbb{I}_{\{X \leq 2\}} \vee \mathbb{I}_{\{X \geq -1\}}, \mathbb{I}_{\{X \leq 1\}} \mathbb{I}_{\{X^2 \geq 4\}}$$

$$\mathbb{I}_{\{X \leq 2\}} \wedge \mathbb{I}_{\{X \geq -1\}} = \mathbb{I}_{\{X \leq 2\} \cap \{X \geq -1\}} = \mathbb{I}_{\{X \in [-1, 2]\}}.$$

$$\mathbb{I}_{\{X \leq 2\}} \vee \mathbb{I}_{\{X \geq -1\}} = \mathbb{I}_{\{X \leq 2\} \cup \{X \geq -1\}} = \mathbb{I}_{\{X \in \mathbb{R}\}} = \mathbb{I}_{\Omega} = 1$$

$$\mathbb{I}_{\{X \leq 1\}} \mathbb{I}_{\{X^2 \geq 4\}} = \mathbb{I}_{\{X \leq 1\} \cap \{X^2 \geq 4\}} = \mathbb{I}_{\{X \leq 1\} \cap \{X \in [-2, 2]\}} = \mathbb{I}_{\{X \in [-2, 1]\}}.$$

Lisez dans le chapitre 1 la définition d'une v.a. et d'une algèbre sur Ω .

Exercice 2 On a défini en cours les v.a. $J_1, J_2, \dots$ avec $J_{i+1} = J_i + \delta J_{i+1}$, avec $\delta J_i \in \{0, 1\}$, et $\delta J_i(\omega) = 1$ si la i -ième lettre du mot $\omega \in \Omega$ est un "h" et 0 sinon. On définit les v.a. $S_{i\delta t}$ par $S_0 = s_0$ donné, puis

$(***) S_{i\delta t} = S_{(i-1)\delta t} U_{i\delta t}$, avec $U_{i\delta t} = u^{\delta J_i} d^{1-\delta J_i}$, $\delta t = T/N$, où $T > 0$ et n sont donnés.

1. Vérifier que $U_{i\delta t}(\omega) \in \{u, d\}$.

Si $\delta J_i(\omega) = 1$ $U_{i\delta t}(\omega) = u^{\delta J_i(\omega)} d^{1-\delta J_i(\omega)} = u^1 d^{1-1} = u d^0 = u \in \{u, d\}$
 Si $\delta J_i(\omega) = 0$ $U_{i\delta t}(\omega) = u^{\delta J_i(\omega)} d^{1-\delta J_i(\omega)} = u^0 d^{1-0} = 1 \cdot d^1 = d \in \{u, d\}$
 donc $\delta J_i(\omega) \in \{u, d\}$ pour tout $\omega \in \Omega$.

2. Montrer par récurrence que $S_{i\delta t} = S_0 \left(\frac{u}{d}\right)^{J_i} d^{i-J_i} = S_0 u^{J_i} d^{i-J_i} = g_i(J_i)$, avec $g_i(x) = S_0 u^x d^{i-x}$; on dit que la v.a. $S_{i\delta t}$ est J_i -mesurable (c'est-à-dire qu'elle ne dépend que de la valeur de J_i). La suite $J_1, J_2, \dots$ s'appelle le processus (stochastique), ou marche, de Bernoulli, et la suite $S_{\delta t}, S_{2\delta t}, \dots$ la marche de Cox-Ross-Rubinstein.

Amorce (par $i=1$) $S_{\delta t} = S_0 U_{\delta t} = S_0 u^{\delta J_1} d^{1-\delta J_1} = S_0 u^{J_1} d^{1-J_1} = S_0 \left(\frac{u}{d}\right)^{J_1} d$

Hypothèse de récurrence (par $i-1$) $S_{(i-1)\delta t} = S_0 \left(\frac{u}{d}\right)^{J_{i-1}} d^{i-1-J_{i-1}}$ (Hyp. Rec.)

A présent, on voit que $S_{i\delta t} = S_{(i-1)\delta t} U_{i\delta t} = S_0 \left(\frac{u}{d}\right)^{J_{i-1}} d^{i-1-J_{i-1}} u^{\delta J_i} d^{1-\delta J_i}$ (Hyp Rec.)
 $= S_0 \left(\frac{u}{d}\right)^{J_{i-1}} \left(\frac{u}{d}\right)^{\delta J_i} d^{i-1-J_{i-1}} d = S_0 \left(\frac{u}{d}\right)^{J_{i-1} + \delta J_i} d^i$
 $= S_0 \left(\frac{u}{d}\right)^{J_i} d^i$ puisque $J_i = J_{i-1} + \delta J_i$.

Enfin, comme $g_i(x) = S_0 u^x d^{i-x}$, on a bien $g_i(J_i) = S_0 u^{J_i} d^{i-J_i} = S_0 u^{J_i} d^{1-J_i} = S_{i\delta t}$

Exercice 3 (Le chat à huit queues) Soit Ω l'ensemble des mots de trois lettres formés à l'aide des seules lettres h et b. Pour $\omega \in \Omega$ et $k = 1, 2, 3$ on pose $\delta J_k(\omega) := 1$ si la k -ième lettre du mot ω est un h et 0 sinon. On pose $J_0 := 0$ puis par récurrence $J_k = J_{k-1} + \delta J_k$

1. Quelles sont les valeurs prises par les v.a. J_1, J_2 , et J_3 sur $(\Omega, \mathcal{P}(\Omega))$? Pour chacune de ces valeurs j donner un exemple de $\omega \in \Omega$ telle que $J_i(\omega) = j$.

$J_1 = 0 \text{ ou } 1$
 $J_1(b) = 0$
 $J_1(h) = 1$

$J_2 = 0 \text{ ou } 1 \text{ ou } 2$
 $J_2(bb) = 0$
 $J_2(bh) = 1$
 $J_2(hh) = 2$

$J_3 = 0 \text{ ou } 1 \text{ ou } 2 \text{ ou } 3$
 $J_3(bbb) = 0$ $J_3(bbh) = 1$
 $J_3(bhb) = 1$ $J_3(hhh) = 3$

2. Pour $k = 0, 2, 3$, représenter dans un système de coordonnées (k, j) les points $(k, J_k(\omega))$ pour tous les $\omega \in \Omega$. Puis joindre par un segment tous les points $(k-1, J_{k-1}(\omega))$ à $(k, J_k(\omega))$ pour $k = 1, 2, 3$ et tous les $\omega \in \Omega$. Vous obtenez ainsi une représentation graphique de l'arbre binaire (couché!) de hauteur 3 associé au processus du Bernoulli $J_3 := (J_k)_{k=0, \dots, 3}$. (Indication : commencer par déterminer les segments issus du point $(1, 1)$ vers un point d'abscisse 2 : dans ce cas que vaut k ? que dire de ω ? que dire de $\delta J_k(\omega)$?)

