

Date :
Université de Nice
Département de Mathématiques

NOM :

Prénom :

Groupe :
Année 2012-2013
Licence MASS 2e année

Probabilité
Fiche TD1

Algèbre d'évènements et variables aléatoires

Notez vos réponses sur cette feuille qui sera ramassée en fin de séance.

Exercice 1 (Indicatrice) On rappelle qu'on appelle *fonction indicatrice* de $A \subseteq \Omega$ la fonction $\mathbb{I}_A : \Omega \rightarrow \{0, 1\}$ définie par $\mathbb{I}_A(\omega) = 1$ si $\omega \in A$, et $\mathbb{I}_A(\omega) = 0$ sinon.

- Exprimer, en fonction de $\mathbb{I}_A$ et de $\mathbb{I}_B$, les indicatrices $\mathbb{I}_{A^c}$, $\mathbb{I}_{A \cap B}$, $\mathbb{I}_{A \cup B}$. Soit $B \subseteq \Omega$. Vérifier que $\mathbb{I}_{A \cap B} = \mathbb{I}_A \wedge \mathbb{I}_B$ et $\mathbb{I}_{A \cup B} = \mathbb{I}_A \vee \mathbb{I}_B$ où $x \wedge y := \min\{x, y\}$ et $x \vee y := \max\{x, y\}$. **Indication :** On commencera par remplir le tableau

$\omega \in$	$\mathbb{I}_A$	$\mathbb{I}_B$	$\mathbb{I}_{A^c}$	$\mathbb{I}_{A \cap B}$	$\mathbb{I}_{A \cup B}$	$\mathbb{I}_A \wedge \mathbb{I}_B$	$\mathbb{I}_A \vee \mathbb{I}_B$	$\mathbb{I}_A \cdot \mathbb{I}_B$	$1 - \mathbb{I}_A$
A		$\times$		$\times$		$\times$		$\times$	
A^c		$\times$			$\times$		$\times$		
B	$\times$		$\times$	$\times$		$\times$		$\times$	$\times$
B^c	$\times$		$\times$		$\times$		$\times$		$\times$
$A \cap B$									
$A - B := A \cap B^c$									
$B - A := B \cap A^c$									
$(A \cup B)^c$									

Donnez à présent vos réponses :

En observant les deux premières lignes du tableau vous voyez que $\mathbb{I}_{A^c} =$

En observant les quatre dernières lignes du tableau vous observez que $\mathbb{I}_{A \cap B} =$

Vous trouvez : $\mathbb{I}_{A \cup B} =$

Indiquez comment vous trouvez cette dernière réponse :

En utilisant que $A \cup B = ((A \cup B)^c)^c$, montrez que $\mathbb{I}_{A \cup B} = 1 - (1 - \mathbb{I}_A)(1 - \mathbb{I}_B)$.

- Soit $X : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$ (on peut aussi dire que X est une *variable aléatoire* (v.a.) sur $(\Omega, \mathcal{P}(\Omega))$). Ecrire chacune des v.a. ci-dessous sous la forme $\mathbb{I}_A$, où A est un nouvel ensemble défini au moyen de X , comme par exemple $A := \{X \leq 1\} := \{\omega \in \Omega \mid X(\omega) \leq 1\}$ (on dit que A est un *évènement* $\alpha(X)$ -mesurable, et que $\mathbb{I}_A$ est une v.a. $\alpha(X)$ -mesurable.)

$$\mathbb{I}_{\{X \leq 2\}} \wedge \mathbb{I}_{\{X \geq -1\}}, \quad \mathbb{I}_{\{X \leq 2\}} \vee \mathbb{I}_{\{X \geq -1\}}, \quad \mathbb{I}_{\{X \leq 1\}} \mathbb{I}_{\{X^2 \geq 4\}}$$

$$\mathbb{I}_{\{X \leq 2\}} \wedge \mathbb{I}_{\{X \geq -1\}} =$$

$$\mathbb{I}_{\{X \leq 2\}} \vee \mathbb{I}_{\{X \geq -1\}} =$$

$$\mathbb{I}_{\{X \leq 1\}} \mathbb{I}_{\{X^2 \geq 4\}} =$$

Lisez dans le chapitre 1 la définition d'une v.a. et d'une algèbre sur Ω .

Exercice 2 On a défini en cours les v.a. $J_1, J_2, \dots$ avec $J_{i+1} = J_i + \delta J_{i+1}$, avec $\delta J_i \in \{0, 1\}$, et $\delta J_i(\omega) = 1$ si la i -ième lettre du mot $\omega \in \Omega$ est un "h" et 0 sinon. On définit les v.a. $S_{i\delta t}$ par $S_0 = s_0$ donné, puis $S_{i\delta t} = S_{(i-1)\delta t} U_{i\delta t}$, avec $U_{i\delta t} = u^{\delta J_i} d^{1-\delta J_i}$, $\delta t = T/N$, où $T > 0$ et n sont donnés.

1. Vérifier que $U_{i\delta t}(\omega) \in \{u, d\}$.
2. Montrer par récurrence que $S_{i\delta t} = S_0 \left(\frac{u}{d}\right)^{J_i} d^i = S_0 u^{J_i} d^{i-J_i} = g_i(J_i)$, avec $g_i(x) = s_0 u^x d^{i-x}$; on dit que la v.a. $S_{i\delta t}$ est J_i -mesurable (c'est-à-dire qu'elle ne dépend que de la valeur de J_i). La suite $J_1, J_2, \dots$ s'appelle le *processus (stochastique)*, ou *marche*, de Bernoulli, et la suite $S_{\delta t}, S_{2\delta t}, \dots$ la *marche de Cox-Ross-Rubinstein*.

Exercice 3 (Le chat à huit queues) Soit Ω l'ensemble des mots de trois lettres formés à l'aide des seules lettres h et b . Pour $\omega \in \Omega$ et $k = 1..3$ on pose $\delta J_k(\omega) := 1$ si la k -ième lettre du mot ω est un h et 0 sinon. On pose $J_0 := 0$ puis par récurrence $J_k = J_{k-1} + \delta J_k$

1. Quelles sont les valeurs prises par les v.a. J_1, J_2 , et J_3 sur $(\Omega, \mathcal{P}(\Omega))$? Pour chacune de ces valeurs j donner un exemple de $\omega \in \Omega$ telle que $J_i(\omega) = j$.

$$J_1 =$$

$$J_2 =$$

$$J_3 =$$

2. Pour $k = 0..3$, représenter dans un système de coordonnées (k, j) les points $(k, J_k(\omega))$ pour tous les $\omega \in \Omega$. Puis joindre par un segment tous les points $(k-1, J_{k-1}(\omega))$ à $(k, J_k(\omega))$ pour $k = 1..3$ et tous les $\omega \in \Omega$. Vous obtenez ainsi une représentation graphique de l'arbre binaire (couché!) de hauteur 3 associé au *processus du Bernoulli* $\mathcal{J}_3 := (J_k)_{k=0..3}$. (**Indication** : commencer par déterminer les segments issus du point $(1, 1)$ vers un point d'abscisse 2 : dans de cas que vaut k ? que dire de ω ? que dire de $\delta J_k(\omega)$?)