

Correction des exercices de la leçon 5

6 novembre 2004

Exercice 1 (éléments de réponse)

1. $P_{X_0=m}(X_2 = s) = P_{X_0=m}(X_1 = j, X_2 = s) + P_{X_0=m}(X_1 = m, X_2 = s) = 0,0975$.

$$\mathbb{P}^2 = \begin{pmatrix} 0,04 & 0,15 & 0,03 & 0,78 \\ 0 & 0,3025 & 0,0975 & 0,6 \\ 0 & 0 & 0,01 & 0,9 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

La probabilité de passer de m à s en deux coups se lit dans la matrice $\mathbb{P}^2$: c'est le coefficient de la deuxième ligne et de la troisième colonne. On retrouve bien le même résultat.

Enfin la chaîne n'est pas périodique (vérifier par exemple que $(\mathbb{P}^k)_{11} = P_{X_0=j}(X_k = j) = P_{X_0=j}(X_1 = X_2 = \dots = X_k = j) = 0,2^k \neq 1$ si $k \geq 1$, de sorte que l'égalité $\mathbb{P}^k = I_4$ est impossible, puisqu'elle signifie, entre autres, $(\mathbb{P}^k)_{11} = 1$).

2. La chaîne n'est pas irréductible (par exemple parce qu'on ne peut pas aller de m à j , ou encore parce que d est absorbant).

3. j , m et s sont transitoires (la probabilité de ne pas revenir en j (resp. m , s) sachant qu'on en part est supérieure à 0,8 (resp. 0,45, 0,9). d est absorbant (et donc récurrent).

Exercice 2

1. On laisse à l'étudiant le soin de réaliser le diagramme en points et flèches.
2. La difficulté de cette question vient de ce qu'on calcule la probabilité de trajectoires de taille infinie. Pour la première on commence par interpréter le fait que $P_{X_0=3}(X_1 = 3) = p_{33} = 1$: cela signifie que si la chaîne arrive dans l'état 3, elle y reste (l'état 3 est *absorbant*, cf 6.). Ainsi

$$\begin{aligned} P(X_0 = 1, \forall n \geq 1, X_n = 3) &= P(X_0 = 1, X_1 = 3) \\ &= P_{X_0=1}(X_1 = 3) \cdot P(X_0 = 1) \\ &= \frac{1}{2} \cdot p_0. \end{aligned}$$

Pour la deuxième on écrit de la même manière que, puisque $p_{44} = 1$, on a

$$\begin{aligned} P(X_0 = 1, X_1 = 2, \forall n \geq 2, X_n = 4) &= P(X_0 = 1, X_1 = 2, X_2 = 4) \\ &= P_{X_1=2}(X_2 = 4) \cdot P_{X_0=1}(X_1 = 2) \cdot P(X_0 = 1) \\ &= \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} \cdot p_0 = \frac{1}{4} \cdot p_0. \end{aligned}$$

La dernière trajectoire a une probabilité nulle, puisque une fois dans l'état 3, la chaîne ne peut revenir en 1.

3. Dans cette question on ne peut plus se ramener (comme en 2.) à l'aide de remarques simples au calcul de la probabilité d'une chaîne de longueur finie. L'idée est alors d'évaluer dans un premier temps la probabilité des N premiers coups (puis on laissera N tendre vers ∞). On commence ainsi par répondre à la question intermédiaire suivante :

Soit $N \geq 0$. Calculer la probabilité de l'événement $A_N = \{X_0 = 1, X_1 = 2, X_2 = 1, X_3 = 2, \dots, X_{2N} = 1, X_{2N+1} = 2\}$.

On calcule cette probabilité par récurrence; si $N \geq 1$ on a la relation d'hérédité suivante

$$\begin{aligned} P(A_N) &= P_{X_{2N}=1}(X_{2N+1}=2) \cdot P_{X_{2N-1}=2}(X_{2N}=1) \cdot \\ &\quad P(X_0=1, X_1=2, X_2=1, X_3=2, \dots, X_{2N-2}=1, X_{2N-1}=2) \\ &= p_{12} \cdot p_{21} \cdot P(A_{N-1}) \\ &= \frac{1}{4} \cdot P(A_{N-1}) . \end{aligned}$$

Cette relation permet de montrer¹ que $P(A_N) = (0,5)^{2N+1} \cdot p_0$.

On conclut en remarquant que pour tout N , $P(X_n = 1 \text{ si } n \text{ est pair}, X_n = 2 \text{ si } n \text{ est impair}) \leq P(A_N)$, puisque si la trajectoire $(X_n = 1 \text{ si } n \text{ est pair}, X_n = 2 \text{ si } n \text{ est impair})$ est réalisée, la trajectoire $(X_0 = 1, X_1 = 2, X_2 = 1, X_3 = 2, \dots, X_{2N} = 1, X_{2N+1} = 2)$ est a fortiori réalisée². On a donc

$$\forall N \geq 0, P(X_n = 1 \text{ si } n \text{ est pair}, X_n = 2 \text{ si } n \text{ est impair}) \leq 0,5^{2N+1} \cdot p_0 .$$

Mais $\lim_{N \rightarrow \infty} 0,5^{2N+1} \cdot p_0 = 0$. En passant à la limite dans l'inégalité précédente on constate que la probabilité de la trajectoire $(X_n = 1 \text{ si } n \text{ est pair}, X_n = 2 \text{ si } n \text{ est impair})$ est effectivement égale à 0.

4. Dire que la répartition initiale est *uniforme* signifie que $p_0 = q_0 = r_0 = s_0 (= \frac{1}{4})$. On utilise ici les relations $\pi_1 = \pi_0 \cdot \mathbb{P}$, puis $\pi_2 = \pi_1 \cdot \mathbb{P}$. On trouve $\pi_1 = (\frac{1}{4}, \frac{1}{4}, \frac{1}{4}, \frac{1}{4}) \cdot \mathbb{P} = (\frac{1}{8}, \frac{1}{8}, \frac{7}{8}, \frac{7}{8})$, puis $\pi_2 = (\frac{1}{16}, \frac{1}{16}, \frac{7}{16}, \frac{7}{16})$.

Si $\pi_0 = (\frac{1}{2}, \frac{1}{2}, 0, 0)$, on a $\pi_1 = (\frac{1}{4}, \frac{1}{4}, \frac{1}{4}, \frac{1}{4})$, puis (remarquer que, puisque c'est le π_0 dans les calculs qui précèdent, le π_2 que l'on cherche a déjà été calculé : c'est le π_1 d'avant) $\pi_2 = (\frac{1}{8}, \frac{1}{8}, \frac{7}{8}, \frac{7}{8})$.

5. On vérifie que si $\pi_0 = (0, 0, r_0, s_0)$ (avec $r_0 + s_0 = 1$), alors $\pi_0 \cdot \mathbb{P} = \pi_0$, ce qui signifie que toute distribution de cette forme est une distribution stationnaire. Inversement supposons que $\pi = (p, q, r, s)$ est une distribution stationnaire pour $\mathbb{P}$. Cela signifie que $\pi \cdot \mathbb{P} = \pi$, soit encore

$$\begin{cases} \frac{1}{2}q = p \\ \frac{1}{2}p = q \\ \frac{1}{2}p + r = r \\ \frac{1}{2}q + s = s , \end{cases}$$

ce qui entraîne $p = \frac{1}{4} \cdot p$, d'où $p = 0$, puis $q = 0$. Donc toute distribution stationnaire est de la forme $(0, 0, r, s)$ (avec nécessairement $r + s = 1$).

6. Les états 3 et 4 sont absorbants puisque $p_{33} = p_{44} = 1$. Les deux autres sont transitoires : la probabilité de ne pas revenir en 1 si on en part est en effet strictement positive : $P_{X_0=1}(\forall n \geq 1, X_n \neq 1) \geq P_{X_0=1}(\forall n \geq 1, X_n = 3) = 0,5 > 0$, de sorte que $P_{X_0=1}(\exists n \geq 1, X_n = 1) \leq 0,5$ (on peut montrer que cette probabilité est égale à $\frac{1}{3}$) : on n'est pas sûr de revenir en 1 lorsqu'on en part, et cet état n'est donc pas récurrent. Il en est de même pour 2.

¹si $N = 0$ c'est juste dire que $P(X_0 = 1, X_1 = 2) = P_{X_0=1}(X_1 = 2) \cdot P(X_0 = 1) = 0,5 \cdot p_0$. Ensuite on montre « $N \Rightarrow N+1$ » : d'après la relation d'hérédité on a $P(A_{N+1}) = 0,5^2 \cdot P(A_N) = 0,5^2 \cdot 0,5^{2N+1} \cdot p_0 = 0,5^{2(N+1)+1} \cdot p_0$, comme attendu.

²On utilise ici la propriété suivante : $A \subset B \Rightarrow P(A) \leq P(B)$.