

Leçon 10 : Evolution de deux espèces en compétition

Le système de Lotka-Volterra permet de modéliser la dynamique de deux populations présentant une relation de type proies-prédateurs. Nous allons à présent modéliser la dynamique de deux populations en compétition, par exemple parce qu'elles partagent la même nourriture. Notre objectif est de déterminer les conditions qui permettent la coexistence des deux populations. La modélisation choisie consiste à faire les hypothèses suivantes : supposons qu'en l'absence de l'autre espèce, chacune des deux espèces suive un modèle logistique ($x'(t) = (\alpha_1 - \beta_1 x(t))x(t)$ et $y'(t) = (\alpha_2 - \beta_2 y(t))y(t)$) et supposons également que le taux de mortalité supplémentaire pour chacune des espèces dû à la présence de l'autre espèce soit proportionnel à la fois à la taille de l'une et de l'autre des deux populations (et donc proportionnel à leur produit). Sous ces hypothèses, le système peut s'écrire :

$$\begin{cases} x'(t) &= (\alpha_1 - \beta_1 x(t) - \gamma_1 y(t))x(t) \\ y'(t) &= (\alpha_2 - \gamma_2 x(t) - \beta_2 y(t))y(t) \end{cases} \quad (1)$$

où les constantes $\alpha_1, \alpha_2, \beta_1, \beta_2, \gamma_1$, et γ_2 sont supposées positives. Une étude qualitative de ce système montre qu'il y a, en plus des deux axes de coordonnées, deux isoclines, horizontale et verticale respectivement, qui sont des droites D_1 et D_2 . La disposition respective de ces deux droites conduit à quatre cas de figure. Dans le premier quadrant, il y a trois équilibres situés sur les axes de coordonnées :

$$O = (0, 0) \quad , \quad A = \left(\frac{\alpha_1}{\beta_1}, 0\right) \quad , \quad B = \left(0, \frac{\alpha_2}{\beta_2}\right)$$

et dans certains cas de figure un quatrième équilibre C situé à l'intersection des deux droites D_1 et D_2 . Sur les quatre dessins ci-dessous, on observe selon les valeurs des constantes $\alpha_1, \alpha_2, \beta_1, \beta_2, \gamma_1$, et γ_2 , soit l'extinction de l'une ou de l'autre des deux espèces, soit leur cohabitation en un équilibre stable, soit l'extinction de l'espèce qui au départ possède le plus grand effectif (sauf dans les cas extrêmement improbables où les effectifs des deux espèces seraient exactement les mêmes au départ). Les quatre dessins correspondent respectivement aux choix suivant des constantes :

$$\begin{cases} x'(t) &= (1 - \frac{1}{2}x(t) - \frac{1}{3}y(t))x(t) \\ y'(t) &= (1 - x(t) - \frac{1}{2}y(t))y(t) \end{cases} \quad (2)$$

$$\begin{cases} x'(t) &= (1 - \frac{1}{2}x(t) - y(t))x(t) \\ y'(t) &= (1 - \frac{1}{3}x(t) - \frac{1}{2}y(t))y(t) \end{cases} \quad (3)$$

$$\begin{cases} x'(t) &= (2 - x(t) - \frac{2}{3}y(t))x(t) \\ y'(t) &= (2 - \frac{2}{3}x(t) - y(t))y(t) \end{cases} \quad (4)$$

$$\begin{cases} x'(t) &= (1 - x(t) - 2y(t))x(t) \\ y'(t) &= (1 - 2x(t) - y(t))y(t) \end{cases} \quad (5)$$

Exercice 1 : On étudie la compétition entre deux populations de scorpions du désert, noirs et rouges respectivement que l'on modélise par un système de type (1) où $\frac{\alpha_1}{\beta_1} = 100 = 2\frac{\alpha_2}{\gamma_2}$ et $\frac{\alpha_2}{\beta_2} = 150 = 3\frac{\alpha_1}{\gamma_1}$. Que représentent les deux constantes $\frac{\alpha_2}{\beta_2}$ et $\frac{\alpha_1}{\beta_1}$? Supposons que la population initiale des scorpions rouges soit de 25 et celle de scorpions noirs de 50, décrire l'évolution de chacune des deux populations selon ce modèle.

Exercice 2 : On a tracé sur les trois dessins ci-dessous quelques solutions du système différentiel suivant

$$\begin{cases} x'(t) &= r(x(t) + y(t)) \left(1 - \frac{x(t)}{K}\right) - \beta x(t)y(t) \\ y'(t) &= \beta x(t)y(t) - uy(t) \end{cases} \quad (6)$$

pour les trois jeux de paramètres ($r = 1, K = 2, \beta = 1, u = 1$), ($r = 1, K = 2, \beta = 1/2, u = 1$) et ($r = 1/5, K = 2, \beta = 1/3, u = 1/3$) mais on a oublié quel dessin correspond à quel jeu de paramètres. Pouvez-vous le retrouver ? Justifier avec soin vos réponses.

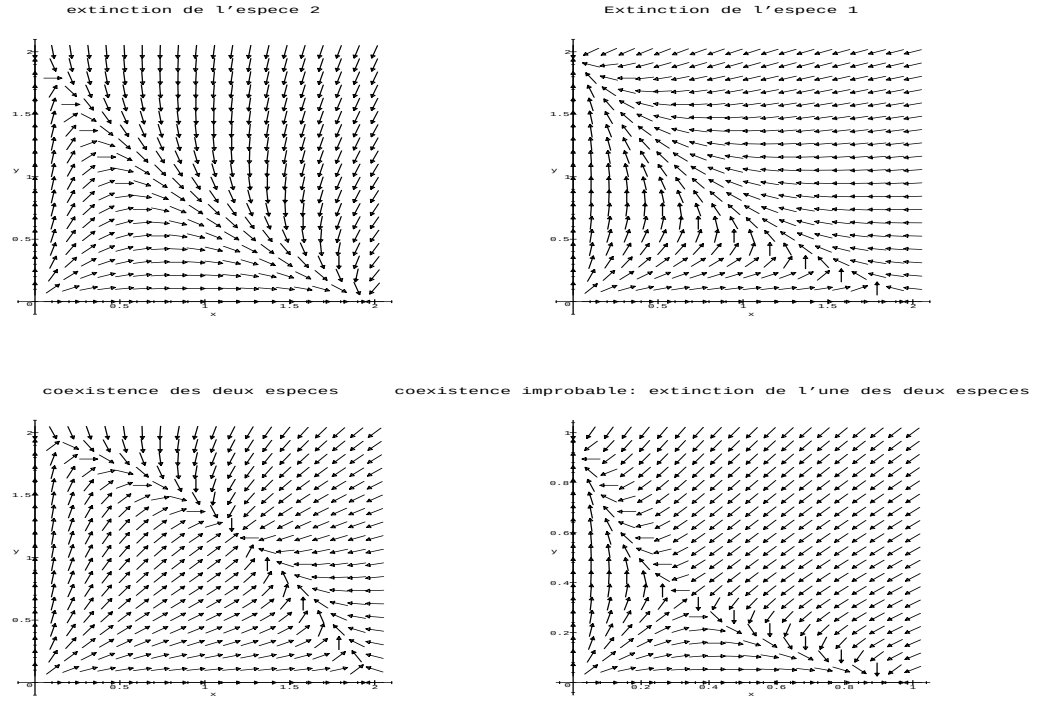


FIG. 1 – Evolution des deux populations en compétition selon les valeurs des constantes $\alpha_1, \alpha_2, \beta_1, \beta_2, \gamma_1$, et γ_2 (systèmes (2), (3), (4) et (5) respectivement)

