NOM : Corrigé
PRENOM :

Date :
Groupe :

Mathématiques pour la Biologie : Feuille-réponses du TD 4
Modèle de Leslie

On répondra aux questions posées aussi clairement que possible dans les espaces prévus et on remettra cette *feuille-réponses* en fin de séance à l'enseignant chargé du Cours/TD.

Exercice 1. : Une scientifique étudie une colonie de souris. Elle note qu'elles produisent en moyenne une fille par femelle pendant leur première année de vie et 8 pendant leur seconde année. Elle note aussi qu'elles ont seulement 25% de chances de survivre une seconde année et aucune de survivre au dela.

Ecrire le système dynamique modélisant cette population de souris :

$$\begin{cases} j_{t+1} = j_t + 8a_t \\ a_{t+1} = 0,25\, j_t \end{cases} \qquad (1)$$

Réécrire le système sous forme matricielle en indiquant quelle est la matrice de Leslie L du système.

$$\begin{pmatrix} j_{t+1} \\ a_{t+1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 8 \\ 0,25 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} j_t \\ a_t \end{pmatrix}, \text{ ou } X_{t+1} = L X_t$$

$$\text{avec } X_t = \begin{pmatrix} j_t \\ a_t \end{pmatrix} \text{ et } L = \begin{pmatrix} 1 & 8 \\ 0,25 & 0 \end{pmatrix}$$

Pour une population initiale de 10 souris, toutes de la première classe d'age, l'évolution des effectifs selon ce modèle est indiquée dans le tableau suivant, que l'on complètera.

t	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
j_t	10	10	30	50	110	210	430	850	1710	3410	6830
a_t	0	2,5	2,5	7,5	12,5	27,7	52,5	107,5	212,5	427,5	852,5

Puis on remplira les deux tableaux suivants :

t	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
N_t	10	12,5	32,5	57,5	122,5	237,5	482,5	957,5	1922,5	3837,5	7682,5
N_{t+1}/N_t	1,25	2,6	~1,77	~2,13	~1,94	~2,03	~1,98	~2,01	1,99	2,00	---

t	0	1	....	8	9	10
j_t/N_t	1	0,8	....	0,89	0,89	0,89
a_t/N_t	0	0,2	....	0,11	0,11	0,11

Que pouvez-vous dire de l'évolution du système ?

1) Concernant la population totale, il semble que $N_{t+1}/N_t \to 2$ et donc que le comportement est exponentiel, de coef de croissance 2.

2) Concernant la répartition juvéniles/adultes, elle semble tendre vers une population comportant 8 fois plus de juvéniles que d'adultes

Exercice 2. **:** On reprend l'étude du modèle précédent. Calculer le carré de la matrice de Leslie L et en déduire que L est une matrice primitive.

$$L^2 = \begin{pmatrix} 1 & 8 \\ 0{,}25 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 8 \\ 0{,}25 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 & 8 \\ 0{,}25 & 2 \end{pmatrix}$$

On constate que L^2 est une matrice strictement positive donc la matrice L est primitive.
Il est donc possible d'appliquer à ce modèle les conclusions de la théorie de Perron-Frobenius

Si l'on demande à un logiciel de calcul scientifique quelles sont les valeurs propres de L, on obtient les deux valeurs $\lambda = -1$ et $\lambda = 2$. Vérifier que $\lambda = 2$ est bien une valeur propre.

Le nombre $\lambda^* = 2$ est une valeur propre à droite de la matrice L s'il existe un vecteur $v = \begin{pmatrix} \alpha \\ \beta \end{pmatrix}$ tel que $LV = 2V$
Mais $LV = 2V$ s'écrit $\begin{pmatrix} 1 & 8 \\ 0{,}25 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = 2\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$ d'où
$\begin{cases} x + 8y = 2x \\ 0{,}25x = 2y \end{cases}$ et donc $x = 8y$. Le vecteur $v = \begin{pmatrix} 8 \\ 1 \end{pmatrix}$
est donc un vecteur propre de L de valeur propre 2.

Indiquer un vecteur propre associé à cette valeur propre qui soit de somme 1.

Pour cela on divise les composantes du vecteur v par leur somme : $v^* = \frac{1}{9}\begin{pmatrix} 8 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 8/9 \\ 1/9 \end{pmatrix} \approx \begin{pmatrix} 0{,}89 \\ 0{,}11 \end{pmatrix}$

Ce vecteur est bien de somme 1 puisque $\frac{8}{9} + \frac{1}{9} = \frac{9}{9} = 1$
et c'est un vecteur propre de L puisqu'on a bien :
$$\begin{pmatrix} 1 & 8 \\ 0{,}25 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 8/9 \\ 1/9 \end{pmatrix} = 2\begin{pmatrix} 8/9 \\ 1/9 \end{pmatrix}$$

Que concluez-vous sur le comportement asymptotique du système ?

Comme $\lambda = 2$ est la valeur propre dominante et v^* le vecteur propre de somme 1 associé, la théorie de Perron-Frobenius (que l'on peut appliquer ici car L est primitive) assure que, pour t assez grand, $N_{t+1} = 2N_t$ d'où une croissance de la population qui double à chaque pas de temps. De plus la répartition juveniles/adultes tend vers une répartition limite $\begin{pmatrix} 8/9 \\ 1/9 \end{pmatrix}$.
Ces conclusions sont conformes aux observations faites sur les 10 premiers pas de temps.