NOM : Date : .
PRENOM : Groupe : .

Finance mathématique : Feuille de réponses du TP 2
Prix d'une option dans un modèle CRR à n étapes

On répondra aux questions posées aussi clairement que possible dans les espaces prévus et on remettra cette feuille de réponses en fin de TP à l'enseignante chargée du TP.

L'objet de cet exercice est de calculer dans un modèle de Cox-Ross-Rubinstein à n étapes le prix d'une option Call et d'une option Put de fonction de pay-off respective $\varphi(S) = (S - K)^+$ et $\varphi(S) = (K - S)^+$. Dans un premier temps nous considèrons les Call et les Put à *la monnaie*, c'est-à-dire que l'on supposera que $K = S_0$. Rappelons que dans le modèle de Cox-Ross-Rubinstein, les prix sont modélisés par une marche aléatoire S_t définie par $S_0 = S0$ et $S_{t+\delta t} = S_t U_t$, avec $U_t \in \{\texttt{up},\texttt{down}\}$, avec `up`$< 1 <$`down` dépendent de n. 0n pose à nouveau

$$n = 100 \;\; T = 1 \;\; \delta t = T/n \;\; up = e^{+\frac{\sigma}{\sqrt{n}}} \;\; down = e^{-\frac{\sigma}{\sqrt{n}}}.$$

Et on introduit comme dans le TP1 la notation $S(i,j) = SS(i+1, j+1)$ ainsiu que les valeurs des constantes $\sigma = 0.4$ et $S_0 = 140$.

Exercice 1. : En utilisant le programme du TP1, recalculer les valeurs de de SS pour $i \in \{0, \ldots, n\}$ et $j \in \{0, \ldots, i\}$. Rappeler ici les lignes de code utilisées.

Exercice 2. : Quelles valeurs trouvez-vous pour SS lorsque la volatilité σ est nulle ? Expliquez pourquoi.

Exercice 3. **:** On revient à une volatilité non nulle. On a vu que le prix $c(s, S_t)$ d'un portefeuille de couverture d'une option ayant pour pay-off φ peut se calculer par récurence rétrograde : On commence par la plus grande valeur $i = n$ car $c(T, S_T) = \varphi(S_T)$ puis on procède de la façon suivante : en notant $C(i, j) := c(i\delta t, S(i, j))$, on a $C(n, j) = \varphi(S(n, j)$, puis $C(i, j) = pC(i+1, j+1)+(1-p)C(i+1, j)$, où p est la probabilité de calcul. Sous `scilab`, pour le même raisons que pour S, on posera `CC(i+1,j+1)=`$C(i, j)$.

Compléter le code scilab ci-dessous calculant les valeurs `CC(i,j)` d'une option Call d'échéance $T = 1$ dans un modèle à $n = 100$ étapes (3 lignes incomplètes), puis, calculer les valeurs de CC.

```
function phi=phi(S);
phi=..........;
endfunction;
CC=zeros(n+1,n+1);
for jj=1 :n+1
CC=(n+1,jj)=.......................................;
end;
for ii=n :-1 :1
for jj=1 :ii
CC(ii,jj)=.................................................;
end;
end;
```

Quelle valeur trouvez vous pour la *prime* $c(0, 0)$ d'un Call à la monnaie ?

Pour $n = 50$ puis pour $n = 200$ la prime serait

Reprendre les deux dernières questions pour un Put à la monnaie. Puis vérifier expérimentalement la relation de parité Call-Put.

Exercice 4. : On rappelle que cette prime peut aussi se calculer en utilisant la formule

$$c(0,0) = \mathbb{E}(\varphi(S(n,J)),$$

où $J \rightsquigarrow \mathcal{B}(n,p)$ ce qui signifie que J est une variable aléatoire qui suit une loi binômiale : $\mathbb{P}(\{J=k\}) = \left(\begin{array}{c} n \\ k \end{array} \right) p^k(1-p)^{n-k}$, avec $\left(\begin{array}{c} n \\ k \end{array} \right) = \frac{n\,!}{k\,!(n-k)\,!}$. Executez les commande `distrib1=binomial(0.5,1)` `distrib2=binomial(0.5,2)` et `distrib3=binomial(0.5,3);` que valent

`distrib1`=

`distrib2`=

`distrib3`=

De façon générale, consultez la doc en ligne pour déterminer ce que retourne la commande `binomial(p,n);` expliquez :

Exercice 5. : En déduire une instruction calculant $c(0,0) = \mathbb{E}(\varphi(S(n,J))$ pour $\varphi(s) = (s - S_0)^+$.

Qu'observez-vous ?

Exercice 6. :

On veut tracer la courbe donnant la prime en fonction de la volatilité σ. Pour cela il convient de redéfinir les quantités up, down et p, puis de même SS et CC (ou PP) comme des fonctions de σ. Tracer cette courbe et la reproduire approximativement ci-dessous. Puis expliquez ce que vous observez.