

Examen

Durée : 3 heures

Exercices.

1. Soit V un $\mathbb{Q}$ -espace vectoriel gradué. On suppose que les éléments homogènes non nuls de V sont tous de degré pair strictement positif. Quelles sont les structures d’adgc possibles sur ΛV ? Les adgc obtenues sont-elles minimales ?

2. Expliciter, pour u un élément de degré pair supérieur ou égal à 2 et $n > 0$ un entier, l’adgc $\Lambda(u, v, du = 0, dv = u^n)$ ainsi que sa cohomologie. Cette algèbre est-elle minimale quel que soit n ? Si ce n’est pas le cas, en donner un modèle minimal.

3. a. Soit $\Lambda(V, d)$ une algèbre de Sullivan, où V est un $\mathbb{Q}$ -espace vectoriel gradué concentré en degré 1. Que peut-on dire de $H^1(\Lambda V)$?

b. L’algèbre $\Lambda(u, v, du = uv, dv = uv)$, où u et v sont de degré 1 est-elle de Sullivan ?

4. 1er Problème : extension entre adgc

Soient $A = \Lambda(u, v, du = 0, dv = u^2)$, où $\deg(u) = 4$, et $B = \Lambda(w, dw = 0)$, où $\deg(w) = 3$, deux adgc sur $\mathbb{Q}$.

a. Ces algèbres sont-elles minimales ? Quelles sont leurs cohomologies respectives ?

b. Le produit tensoriel $A \otimes B$ s’identifie comme algèbre graduée commutative à $L = \Lambda(u', v', w')$ où $\deg(u') = 4$, $\deg(v') = 7$, $\deg(w') = 3$. On dispose des morphismes naturels d’algèbres graduées :

$$i : A \rightarrow L, u \mapsto u' \text{ et } v \mapsto v' ;$$

$$p : L \rightarrow B, u' \mapsto 0, v' \mapsto 0, w' \mapsto w.$$

Soit d une différentielle sur L qui en fait une adgc compatible avec les morphismes i et p . Montrer qu’on a $dw' = au'$ pour un $a \in \mathbb{Q}$, que l’adgc (L, d) est déterminée par a et qu’une telle structure d’adgc sur L existe pour tout choix de $a \in \mathbb{Q}$.

On note L_a cette adgc.

c. Que peut-on dire de L_0 ? Montrer que si a et b sont deux rationnels non nuls alors L_a et L_b sont isomorphes comme adgc.

d. Déterminer $H^7(L_1)$ puis toute l’homologie de L_1 . L’algèbre L_1 est-elle minimale ? Si ce n’est pas le cas, en donner un modèle minimal.

e. Soient $a, b \in \mathbb{Q}$ et $f : L_a \rightarrow L_b$ un morphisme d’algèbres graduées tel que le diagramme

$$\begin{array}{ccccc} & & L_a & & \\ & \nearrow i & \downarrow f & \nwarrow p & \\ A & & & & B \\ & \searrow i & \downarrow f & \swarrow p & \\ & & L_b & & \end{array}$$

soit commutatif. Montrer que le morphisme f est entièrement déterminé par un élément $y \in A$ vérifiant la relation $f(w') = w' + i(y)$.

Prouver que si de plus f est un morphisme d’adgc alors y vérifie $(a - b)u = dy$. Qu’est-ce que cela entraîne pour a et b ?

5. 2ème problème : représentabilité de l'homologie d'une adgc

Soit $n \geq 1$ un entier. Soit $\Lambda(x)$ la $\mathbb{Q}$ -algèbre graduée commutative libre sur un générateur x de degré n , qu'on munie de la différentielle nulle.

a. Soit (A, d) une adgc avec $H^*(A) \cong \Lambda(x)$ comme algèbre graduée. Montrer que (A, d) est quasi-isomorphe à $(\Lambda(x), 0)$.

b. Soit (A, d) une adgc. Montrer que l'ensemble $\text{Hom}_{\text{Adgc}}(\Lambda(x), A)$ est en bijection naturelle avec l'ensemble des n -cocycles de A .

On considère les morphismes d'adgc de $\Lambda(x)$ dans $(A, d) \otimes \Lambda(t, dt)$, où $\Lambda(t, dt)$ est l'algèbre libre sur un générateur t de degré 0 et un générateur dt de degré 1, munie de la différentielle donnée par $d(t) = dt$, $d(dt) = 0$.

c. Montrer qu'un élément de degré n de $A \otimes \Lambda(t, dt)$ s'écrit de façon unique $p(t) + q(t)dt$ pour p et q deux polynômes en t à coefficients dans A : $p(t) = a_0 + a_1t + \dots + a_k t^k$, $q(t) = b_0 + \dots + b_l t^l$. (On identifie t avec $1 \otimes t$, dt avec $1 \otimes dt \dots$).

A quelle condition sur les familles (a_i) et (b_i) cet élément de $(A, d) \otimes \Lambda(t, dt)$ est-il un cocycle ? A quelle condition est-ce un cobord ?

d. On dispose de deux morphismes $\epsilon_0 : A \otimes \Lambda(t, dt) \rightarrow A, p(t) + q(t)dt \mapsto p(0)$ et $\epsilon_1 : A \otimes \Lambda(t, dt) \rightarrow A, p(t) + q(t)dt \mapsto p(1)$. On rappelle que deux morphismes d'adgc $f, g : \Lambda(x) \rightarrow A$ sont homotopes s'il existe un morphisme $h : \Lambda(x) \rightarrow A \otimes \Lambda(t, dt)$ tel que $\epsilon_0 \circ h = f$ et $\epsilon_1 \circ h = g$.

Montrer que si f est homotope à g alors $f(x) - g(x)$ est un cobord dans A (ie $\exists a \in A, f(x) - g(x) = da$). En déduire que l'application $\text{Hom}_{\text{Adgc}}(\Lambda(x), A) \rightarrow H^n(A)$ passe au quotient pour la relation d'homotopie.

e. Soient a, b deux cocycles de degré n de A . On note f, g les morphismes d'adgc $\Lambda(x) \rightarrow A$ correspondants. Montrer que si $a - b$ est un cobord dans A alors f est homotope à g .

f. Que peut on dire du foncteur $\text{hAdgc} \rightarrow \mathcal{E}\text{ns}, A \mapsto H^n(A)$? Expliquer.