

OBJECTIFS DE FORMATION ET PROGRAMME DE MATHÉMATIQUES

I OBJECTIFS DE FORMATION

1) Objectifs généraux de la formation

Dans la filière Mathématiques et Physique, les mathématiques constituent conjointement une discipline scientifique à part entière, développant des concepts, des résultats, des méthodes et une démarche spécifiques, et une discipline fournissant des connaissances et des méthodes nécessaires à la physique, à l'informatique, à la chimie et aux sciences industrielles.

La réflexion sur les concepts et les méthodes, la pratique du raisonnement et de la démarche mathématique constituent un objectif majeur. Les étudiants doivent connaître les définitions, les énoncés et les démonstrations des théorèmes figurant au programme, savoir analyser la portée des hypothèses et des résultats, et savoir mobiliser leurs connaissances pour l'étude de problèmes. En revanche, certains résultats puissants, mais dont la démonstration est hors de portée au niveau des classes préparatoires, sont admis.

a) *Objectifs de la formation*

La formation est conçue en fonction de quatre objectifs essentiels.

- Développer conjointement l'intuition, l'imagination, le raisonnement et la rigueur.
- Promouvoir la réflexion personnelle des étudiants sur les problèmes et les phénomènes mathématiques, sur la portée des concepts, des hypothèses, des résultats et des méthodes, au moyen d'exemples et de contre-exemples ; développer ainsi une attitude de questionnement et de recherche.
- Exploiter toute la richesse de la démarche mathématique : analyser un problème, expérimenter sur des exemples, formuler une conjecture, élaborer et mettre en œuvre des concepts et des résultats théoriques, rédiger une solution rigoureuse, contrôler les résultats obtenus et évaluer la pertinence des concepts et des résultats au regard du problème posé, sont des éléments indissociables de cette démarche ; valoriser ainsi l'interaction entre d'une part l'étude de phénomènes et de problèmes mathématiques, et d'autre part l'élaboration et la mise en œuvre des concepts théoriques, les phases d'abstraction et de mise en théorie interagissant donc constamment avec celles de passage aux exemples et aux applications.
- Privilégier les problèmes mathématiques susceptibles de développer la réflexion personnelle des étudiants et les capacités de synthèse. En particulier, on ne saurait en aucun cas se limiter à l'étude de problèmes dont les énoncés sont fermés et d'exercices mettant en œuvre des techniques bien répertoriées. Il est nécessaire d'entraîner les étudiants à se poser eux-mêmes des questions, c'est-à-dire à prendre en compte une problématique mathématique ; l'effort de synthèse doit constituer l'aboutissement de cette démarche. Les travaux d'initiative personnelle encadrés (TIPE) permettent de renforcer cette attitude, essentielle pour la formation scientifique, laquelle est par nature d'abord un questionnement.

b) *Unité de la formation scientifique*

Il est important de mettre en valeur l'interaction entre les différentes parties du programme d'une même discipline, tant au niveau du cours que des thèmes des travaux proposés aux étudiants. Plus largement, l'enseignement d'une discipline scientifique est à relier à celui des autres disciplines sous deux aspects principaux : organisation concertée des activités d'enseignement d'une même classe ; étude de questions mettant en œuvre des interactions entre les champs de connaissances (mathématiques et physique, mathématiques et informatique, mathématiques et sciences industrielles. ...).

La coopération des enseignants d'une même classe ou d'une même discipline et, plus largement, celle de l'ensemble des enseignants d'un cursus donné, y contribue de façon efficace, notamment dans le cadre des travaux d'initiative personnelle encadrés.

Il importe aussi que le contenu culturel des mathématiques ne soit pas sacrifié au profit de la seule technicité. En particulier, les textes et les références historiques permettent d'analyser l'interaction entre les problèmes mathématiques et la construction des concepts, mettent en évidence le rôle central joué par le questionnement scientifique pour le développement théorique et montrent en outre que les sciences, et les mathématiques en particulier, sont en perpétuelle évolution et que le dogmatisme n'est pas la référence en la matière.

2) Architecture et contenus des programmes

a) *Intentions majeures*

Les contenus sont organisés autour de quatre intentions majeures.

- Organiser les programmes autour de quelques notions essentielles, en dégagant les idées majeures et leur portée, en fournissant des outils puissants et efficaces, en évitant toute technicité gratuite, et en écartant les notions qui ne pourraient être traitées que de façon superficielle.
- Donner un rôle très important aux travaux pratiques, dont la fonction est double : indiquer le champ des problèmes et phénomènes mathématiques à étudier en relation avec les concepts figurant au programme ; préciser les méthodes et les techniques usuelles exigibles des étudiants. En revanche, les travaux pratiques ne doivent pas conduire à des dépassements de programme prenant la forme d'une anthologie d'exemples dont la connaissance serait exigible des étudiants.
- Mettre en valeur le caractère plurivalent des concepts mathématiques. Cette plurivalence s'inscrit dans un double mouvement : d'une part, l'étude d'un domaine particulier vient enrichir le concept général, grâce au langage et aux méthodes propres à ce domaine ; d'autre part, le concept général permet le transfert des connaissances d'un domaine d'application à un autre. C'est dans cette perspective, et à l'opposé de tout dogmatisme, que les structures constituent un outil pour une meilleure compréhension et une meilleure précision de la pensée et fournissent des méthodes pour l'étude des problèmes mathématiques.
- Réaliser un équilibre global entre l'algèbre, l'analyse et la géométrie. Il va de soi, d'ailleurs, que cette séparation traditionnelle n'est qu'une commodité de rédaction et ne doit pas faire oublier les interactions nombreuses et étroites entre ces trois grands domaines des mathématiques. Dans cette intention, les programmes sont présentés selon deux grandes parties : analyse et géométrie différentielle, algèbre et géométrie.

C'est en fonction des objectifs précédents que les programmes sont conçus et que l'horaire hebdomadaire doit être géré. Dans les classes MPSI et MP, il est de 12 heures (10 heures de cours et 2 heures de travaux dirigés). Pour valoriser les concepts essentiels et les principales méthodes (comprenant les exemples et contre-exemples qui illustrent leur portée et leurs conditions de validité), il convient de consacrer à leur étude environ 7 à 8 heures de cours. Les 4 ou 5 heures restantes (2 ou 3 heures de cours et 2 heures de travaux dirigés) sont à consacrer à l'étude de problèmes mathématiques, notamment ceux qui sont indiqués dans les rubriques de travaux pratiques ; à cet égard, toute technicité gratuite est à éviter.

b) *Secteur de l'analyse et de ses interventions*

Dans ce secteur, le programme est organisé autour des concepts fondamentaux de fonction, qui permet de modéliser le comportement des phénomènes continus, et de suite (ou de série), qui permet de modéliser le comportement des phénomènes discrets. Les interactions entre le continu et le discret sont mises en valeur, notamment en seconde année.

Le programme d'analyse combine l'étude des problèmes qualitatifs avec celle des problèmes quantitatifs ; il développe conjointement l'étude du comportement global des suites et des fonctions avec celle de leur comportement local ou asymptotique. Pour l'étude des solutions des équations, il combine les problèmes d'existence et d'unicité, les méthodes de calcul exact, les méthodes d'approximation et les algorithmes de mise en œuvre. Pour l'ensemble de l'analyse, il met l'accent sur les techniques de majoration.

En première année, la maîtrise du calcul différentiel et intégral à une variable et de ses interventions en géométrie différentielle plane constitue un objectif essentiel.

En seconde année, le programme introduit le concept d'espace vectoriel normé et d'application linéaire continue, afin de fournir un cadre cohérent pour l'étude des suites, des séries et des fonctions et celle des suites et des séries de fonctions. L'intégration, la représentation des fonctions, notamment par des séries (séries entières, séries de Fourier) et par des intégrales dépendant d'un paramètre, l'approximation des fonctions, l'étude des équations différentielles (notamment des systèmes linéaires), l'étude des fonctions de plusieurs variables (en interaction étroite avec la géométrie différentielle) tiennent une place majeure.

c) *Secteur de l'algèbre et de ses interventions*

Dans ce secteur, le programme est organisé autour des concepts fondamentaux de l'algèbre linéaire (points de vue géométrique et matriciel), tandis que l'étude systématique des anneaux et des corps en a été écartée. Il met en œuvre les méthodes de l'algèbre linéaire pour la résolution de problèmes issus, non seulement des autres secteurs de l'algèbre, mais aussi de l'analyse et de la géométrie. Il met en valeur l'importance du concept de groupe pour les méthodes de la géométrie.

En première année, le programme d'algèbre et géométrie combine l'étude de l'algèbre linéaire (espaces vectoriels, applications linéaires, algèbres, dimension, rang, calcul matriciel, espaces vectoriels euclidiens, automorphismes

orthogonaux) et de ses interventions en algèbre, en analyse et en géométrie affine et euclidienne ; il comporte en outre l'étude de l'arithmétique élémentaire et des polynômes à une indéterminée.

En seconde année, le programme développe de nouveaux concepts (dualité, polynômes d'endomorphismes, valeurs propres et sous-espaces propres, réduction des endomorphismes d'un espace vectoriel et des endomorphismes symétriques d'un espace vectoriel euclidien, réduction des matrices). Il comporte en outre quelques compléments d'algèbre générale (arithmétique, polynômes).

d) *Secteur de la géométrie et de ses interventions*

Une vision géométrique des problèmes imprègne l'ensemble du programme de mathématiques car les méthodes de la géométrie et les apports de son langage (figures, représentations graphiques, interprétations géométriques...) jouent un rôle capital en algèbre, en analyse et dans leurs domaines d'intervention.

e) *Articulation avec la physique, la chimie et les sciences industrielles*

En relation étroite avec les concepts propres à la physique, à la chimie et aux sciences industrielles, le programme valorise les interprétations des concepts de l'analyse, de l'algèbre linéaire et de la géométrie en termes de paramètres modélisant l'état et l'évolution de systèmes mécaniques, physiques ou chimiques (mouvement, vitesse et accélération, trajectoires et lignes de niveau, signaux continus ou discrets, mesure des grandeurs mécaniques ou physiques...). Ces interprétations, conjointement avec les interprétations graphiques et géométriques, viennent en retour éclairer les concepts fondamentaux de l'analyse et de l'algèbre linéaire.

f) *Rôle de la pensée algorithmique*

En relation avec le programme d'informatique, l'ensemble du programme de mathématiques valorise la démarche algorithmique ; il intègre la construction et la mise en forme d'algorithmes et, sur des exemples, la comparaison de leurs performances. En mathématiques, aucune connaissance sur la théorie des algorithmes n'est exigible des étudiants.

Les algorithmes associés aux notions étudiées dans le programme de mathématiques sont mentionnés dans le texte même du programme ou dans les travaux pratiques. En outre, de nombreux travaux pratiques donnent lieu à l'exploitation du logiciel de calcul symbolique et formel étudié dans le programme d'informatique.

g) *Emploi des calculatrices*

Cet emploi est défini par la réglementation en vigueur. Les étudiants doivent savoir utiliser une calculatrice programmable dans les situations liées au programme de la classe et de la discipline considérées. Cet emploi combine les capacités suivantes, qui constituent un savoir-faire de base et sont seules exigibles :

- savoir effectuer des opérations arithmétiques sur les nombres réels et savoir comparer deux nombres réels ;
- savoir utiliser les touches des fonctions qui figurent au programme de la classe considérée et savoir programmer le calcul des valeurs d'une fonction d'une ou plusieurs variables permis par ces touches ;
- savoir programmer une instruction séquentielle, une instruction conditionnelle et une instruction itérative comportant éventuellement un test d'arrêt.

3) **Conception et organisation de la formation**

a) *Organisation du travail de la classe*

On ne saurait se borner à l'exposé, si parfait soit-il, de théories éventuellement suivies d'applications ; il convient au contraire de centrer l'enseignement autour de l'étude de phénomènes et de problèmes mathématiques. En particulier, il est essentiel que l'approfondissement théorique ne soit coupé ni des problématiques qui le sous-tendent, ni des secteurs d'intervention qui le mettent en jeu. Deux objectifs essentiels sont à poursuivre :

- Promouvoir l'acquisition de méthodes et entraîner les étudiants à exploiter toute la richesse de la démarche mathématique ; la classe est donc un lieu de découverte et d'exploitation de problématiques, un lieu d'analyse des phénomènes et des concepts, un lieu de réflexion et de débats sur l'architecture des contenus, les démarches suivies, les hypothèses d'un théorème, la portée des concepts mis en jeu et des résultats obtenus. Elle est aussi un lieu d'élaboration de synthèses ayant pour triple objectif de dégager clairement les idées et méthodes essentielles, de préciser leur portée pour la résolution de problèmes et, inversement, d'identifier les principales méthodes dont on dispose pour étudier un type donné de problème. Dans cette perspective, les enseignements combinent de façon organique la formulation et l'analyse de problèmes, l'élaboration de concepts, la présentation, la démonstration et la mise en œuvre de résultats, ainsi que la mise en valeur de méthodes.

- Développer les capacités de communication. La pertinence des indications écrites et orales données par le professeur et la qualité de structuration des échanges interpersonnels jouent ici un rôle essentiel : qualités d'écoute et d'expression orale (formulation d'une question, d'une réponse, d'une idée...), qualités de lecture et d'expression écrite (maîtrise du tableau, prise de notes, analyse d'un énoncé, mise au point de la rédaction d'un

énoncé ou d'un raisonnement...). La communication utilise des moyens diversifiés : non seulement le tableau, dont la maîtrise est un élément important, mais aussi le rétroprojecteur, l'ordinateur connecté à un dispositif de projection approprié.

b) Organisation du travail personnel des étudiants

Les travaux effectués en dehors du temps d'enseignement, à la maison ou au lycée, ont une importance capitale ; leurs fonctions sont diversifiées :

- L'étude du cours joue un rôle central. Son objectif est triple ; connaître les concepts et les résultats essentiels, acquérir la maîtrise des méthodes d'étude des problèmes, savoir analyser la portée des hypothèses et des résultats, les démarches et les techniques de raisonnement mises en jeu dans les démonstrations. L'étude du cours est donc indissociable de celle des problèmes.

- La résolution d'exercices d'entraînement, combinée avec l'étude du cours, a pour fonction d'affermir les connaissances de base des étudiants et d'évaluer leur capacité à les mettre en œuvre sur des exemples simples. La résolution de tels exercices n'est donc pas un objectif en soi, et tout excès de technicité doit être évité. La maîtrise de ce type de questions est une exigence valable pour l'ensemble des étudiants.

- L'étude de questions plus complexes, sous forme de préparation d'activités en classe ou de problèmes à résoudre et à rédiger, alimente le travail de recherche, individuel ou en équipe, et permet aux étudiants d'évaluer leur capacité à mobiliser leurs connaissances de façon coordonnée. Au sein d'une même classe, les thèmes d'étude peuvent être diversifiés en fonction du projet de formation des étudiants.

- Les travaux individuels de rédaction en temps libre (solution d'un problème, mise au point d'exercices étudiés en classe, rapport de synthèse sur un thème d'étude, analyse critique d'un texte...) visent essentiellement à développer les capacités d'expression écrite et de mise au point d'un raisonnement. La qualité de la rédaction et de la présentation, la clarté et la précision des raisonnements, constituent des objectifs très importants. Ces travaux de rédaction doivent donc être fréquents, mais leur longueur doit rester raisonnable. Leur contenu peut être diversifié en fonction du projet de formation des étudiants.

- Les épreuves écrites en temps limité ont pour objectif principal de préparer les étudiants aux épreuves écrites des concours. Les connaissances exigibles dans ces épreuves ne doivent en aucun cas dépasser celles qui figurent au programme ; si d'autres connaissances sont à mettre en œuvre, toutes les indications utiles doivent être fournies aux étudiants. Quand il s'agit d'épreuves de concours de longueur importante, le barème doit en tenir compte. En première période des classes de première année, ces épreuves doivent être de taille raisonnable et de difficulté progressive, afin de ne pas décourager les étudiants et de leur permettre de rédiger clairement une solution.

- La recherche et l'exploitation (individuelle ou en équipe) de documents scientifiques contribue au développement des capacités d'autonomie. Elle permet aussi de développer l'ouverture d'esprit, grâce à la prise de connaissance de points de vue diversifiés sur une même question, et les capacités d'analyse et de synthèse, grâce à une étude comparée de ces points de vue. Elle permet enfin aux étudiants d'approfondir leurs connaissances en complément des travaux menés en classe ou en fonction de leurs centres d'intérêt et de leur projet de formation.

- La préparation et la mise en œuvre d'exposés vise à développer les capacités d'organisation de la pensée et les qualités d'expression orale.

c) Évaluation et notation des étudiants

La communication des objectifs à atteindre et la mise en œuvre de formes diversifiées d'évaluation peuvent aider de manière efficace les étudiants à progresser, à se situer et à affiner un choix d'orientation.

La pertinence du calibrage de la notation constitue un objectif important ; ce calibrage doit être établi en relation avec les performances attendues des étudiants des classes de première année en début de seconde année ou celles attendues des étudiants de seconde année dans les épreuves de concours. Il convient d'éviter tant la surnotation, génératrice d'illusion, que la sousnotation, génératrice de découragement.

d) Interprétation et délimitation des programmes

Pour chacune des classes, les connaissances et les capacités exigibles des étudiants sont indiquées avec précision, de façon à combattre l'inflation théorique autant que l'excès de technicité. Il importe de souligner la nécessité impérieuse de respecter les limites du programme, tant au niveau de l'enseignement qu'à celui des épreuves d'évaluation. Un encyclopédisme relayé par la pratique du bachotage irait totalement à l'encontre du but recherché, qui tend à privilégier une formation de l'esprit scientifique fondée sur l'approfondissement d'un noyau limité de connaissances fondamentales. Il importe que cet état d'esprit trouve sa traduction dans les sujets des épreuves d'évaluation.

II PROGRAMME DES CLASSES MP ET MP*

AVERTISSEMENT

1) Organisation du texte des programmes

Ce texte est organisé en deux titres : analyse et géométrie différentielle, algèbre et géométrie. Chacun de ces titres comporte des parties (numérotées I, II, ...), elles-mêmes subdivisées en chapitres (numérotés 1, 2, ...), puis en paragraphes (repérés a, b, ...). Chacune des parties comporte :

- En tête de partie ou de chapitre, un bandeau définissant les objectifs essentiels et délimitant le cadre général d'étude des notions relatives à cette partie ou à ce chapitre.
- Pour chaque paragraphe, un texte présenté en deux colonnes ; à gauche sont fixées les connaissances et les méthodes figurant au programme, à droite un commentaire indique les exemples fondamentaux à connaître et les méthodes à maîtriser, précise le sens ou les limites à donner à certaines questions, et repère le cas échéant l'interaction du sujet étudié avec d'autres parties du programme.
- En fin de partie, des travaux pratiques, qui sont de deux sortes : les uns, dont l'énoncé commence par la locution "Exemples de ...", indiquent le champ des questions mathématiques à étudier, soit dans le cadre du temps d'enseignement, soit dans celui du travail personnel des étudiants ; les autres fixent les méthodes et les techniques que les étudiants doivent connaître et savoir mettre en œuvre. Les travaux pratiques sont également présentés en deux colonnes ; à gauche figurent leurs énoncés, à droite un commentaire indique des repères pour le niveau d'approfondissement à donner à leur étude. Enfin, les travaux pratiques qui doivent donner lieu à l'emploi du logiciel de calcul symbolique et formel étudié en informatique sont repérés par le signe §.

2) Connaissances et capacités exigibles des étudiants

Le programme de mathématiques de la filière Mathématiques et Physique comporte conjointement celui des classes de seconde année MP et MP*, fixé par le présent texte, et celui de la classe de première année MPSI, fixé par l'arrêté du 3 Juillet 1995, publié au B.O.E.N. hors série du 20 Juillet 1995, volume 2.

Parmi les connaissances (définitions, notations, énoncés, démonstrations, exemples, contre-exemples, méthodes, algorithmes...) et les capacités de mise en œuvre de ces connaissances, le texte du programme délimite de manière précise trois catégories.

a) *Celles qui sont exigibles des étudiants* : il s'agit de l'ensemble des points figurant dans la colonne de gauche des différents paragraphes, des points qui sont repérés comme tels dans la colonne de droite ou dans les bandeaux, et des travaux pratiques non repérés par la mention "Exemples de ...". Les démonstrations des résultats concernés sont exigibles des étudiants, sauf mention expresse du contraire.

Enfin, aucun développement ne doit être donné aux notions figurant au programme lorsqu'elles sont uniquement repérées par la locution "définition de ..." ; seule cette définition est alors exigible des étudiants.

b) *Celles qui relèvent d'activités possibles ou souhaitables, mais qui ne sont pas exigibles des étudiants* : il s'agit de tous les travaux pratiques dont l'énoncé commence par la locution "Exemples de ..." et des points repérés dans les bandeaux ou dans la colonne de droite par la locution "aucune connaissance spécifique sur ... n'est exigible des étudiants". Lorsqu'une épreuve d'évaluation fait intervenir de telles connaissances ou de telles capacités, toutes les indications utiles doivent être fournies aux étudiants.

En ce qui concerne les démonstrations des théorèmes dont l'énoncé figure au programme et qui sont repérés dans la colonne de droite par la locution "la démonstration n'est pas exigible des étudiants", le professeur peut, suivant les cas, démontrer en détail le résultat considéré, indiquer l'idée de sa démonstration ou l'admettre.

c) *Celles qui sont indiquées comme étant "hors programme"* dans les bandeaux ou dans la colonne de droite. Elles ne doivent pas être traitées et ne peuvent faire l'objet d'aucune épreuve d'évaluation.

En particulier, la locution "la démonstration est hors programme" signifie qu'il est demandé d'admettre le résultat ; aucune épreuve d'évaluation ne peut comporter une telle démonstration.

Enfin, lorsqu'une question est repérée dans les bandeaux par la locution "En vue de l'enseignement des autres disciplines scientifiques, il convient ... mais, en mathématiques, aucune connaissance sur ce point n'est exigible des étudiants", aucune épreuve d'évaluation en mathématiques ne peut porter sur cette question.

ALGÈBRE ET GÉOMÉTRIE

Le programme est organisé autour des concepts fondamentaux de l'algèbre linéaire : espaces vectoriels, applications linéaires, sous-espaces vectoriels supplémentaires, sommes directes, projecteurs ; bases, dimension et rang ; formes linéaires, formes bilinéaires symétriques, formes quadratiques ; valeurs propres et sous-espaces propres d'un endomorphisme. Le programme met en œuvre les méthodes de l'algèbre linéaire pour la résolution de problèmes issus, non seulement des autres secteurs de l'algèbre, mais aussi de l'analyse et de la géométrie. Il comporte en outre quelques compléments d'algèbre et d'arithmétique : groupes cycliques, notions sur les actions de groupe, idéaux de l'anneau $\mathbf{Z}$, anneau $\mathbf{Z}/n\mathbf{Z}$, idéaux de l'anneau $K[X]$.

La maîtrise de l'algèbre linéaire en dimension finie et, notamment, de l'articulation entre le point de vue géométrique (vecteurs et points) et le point de vue matriciel, constitue un objectif essentiel. Le programme combine, de façon indissociable, l'étude des concepts de l'algèbre linéaire avec celle des problèmes linéaires (indépendance linéaire, équations linéaires, réduction des endomorphismes et des matrices, approximation des fonctions, propriétés affines et métriques des configurations et des transformations géométriques...).

Le programme d'algèbre et géométrie comporte la construction, l'analyse et l'emploi d'algorithmes numériques (issus de l'arithmétique ou de l'algèbre linéaire) ainsi que l'emploi du logiciel de calcul symbolique et formel.

I. ALGÈBRE GÉNÉRALE

1- Groupes, actions de groupes

L'objectif de ce chapitre est double :

- Consolider les notions abordées en première année : groupes, sous-groupes, morphismes de groupes, groupe symétrique ; introduire quelques notions de base sur les actions de groupes.
- Étudier les groupes quotients $\mathbf{Z}/n\mathbf{Z}$ et les groupes cycliques.

a) Groupes $\mathbf{Z}/n\mathbf{Z}$

Structure des sous-groupes de $\mathbf{Z}$.

Relation de congruence modulo un entier $n > 0$, notation $a \equiv b$ modulo n . Compatibilité avec l'addition ; groupe quotient $\mathbf{Z}/n\mathbf{Z}$, morphisme canonique de $\mathbf{Z}$ sur $\mathbf{Z}/n\mathbf{Z}$. Générateurs du groupe $\mathbf{Z}/n\mathbf{Z}$.

Tout autre exemple de groupe quotient est hors programme.

Étant donné un élément a d'un groupe G , morphisme $k \mapsto ka$ (ou $k \mapsto a^k$) du groupe $\mathbf{Z}$ dans G ; noyau et image d'un tel morphisme. Le sous-groupe de G engendré par a est isomorphe à $\mathbf{Z}$ si ce noyau est réduit à $\{0\}$; il est isomorphe à $\mathbf{Z}/n\mathbf{Z}$ si ce noyau est $n\mathbf{Z}$.

Définition d'un groupe cyclique G (groupe fini admettant un générateur a) ; isomorphisme de $\mathbf{Z}/n\mathbf{Z}$ sur G , où n est l'ordre de G . Application au groupe $\mathbf{U}_n$ des racines n -ièmes de l'unité.

b) Groupes, action d'un groupe sur un ensemble

Il s'agit d'introduire quelques notions de base sur les groupes et les actions de groupes et de les mettre en œuvre sur les groupes figurant au programme (groupe symétrique $\mathfrak{S}_n$, groupe linéaire, groupe orthogonal et leurs sous-groupes), en relation étroite avec l'algèbre linéaire et la géométrie. Il convient notamment d'étudier des exemples simples de réalisations géométriques de groupes finis par des groupes d'isométries.

Définition du produit de deux groupes.

Définition d'une partie génératrice d'un groupe.

Définition d'une action (ou opération) $(g, x) \mapsto gx$ d'un groupe G sur un ensemble E ; morphisme de G dans le groupe $\mathfrak{S}(E)$ associé. Définition d'une orbite.

L'étude générale des groupes et des actions de groupe, ainsi que celle des groupes finis, est hors programme.

2- Anneaux et corps

L'objectif de ce chapitre est double :

- Consolider et approfondir les notions d'arithmétique abordées en classe de première année, notamment grâce à l'étude des idéaux de $\mathbf{Z}$ et des anneaux $\mathbf{Z}/n\mathbf{Z}$.
- Consolider et approfondir les notions sur les polynômes à une indéterminée abordées en classe de première année, notamment grâce à l'étude des idéaux de $K[X]$, et de la structure de la sous-algèbre d'une algèbre unitaire engendrée par un élément de cette algèbre.

Les notions d'anneau quotient et d'anneau principal sont hors programme.

a) Idéaux d'un anneau commutatif

Définition d'un morphisme d'anneaux, d'un isomorphisme.

Noyau et image d'un morphisme d'anneaux commutatifs.
Définition d'un idéal d'un anneau commutatif A .

Dans un anneau intègre A , définition de la relation de divisibilité $x|y$.

Définition de l'idéal Ax (ou xA) engendré par un élément x de A .

Pour que x divise y , il faut et il suffit que $Ay \subset Ax$.

b) Idéaux de $\mathbf{Z}$, anneau $\mathbf{Z}/n\mathbf{Z}$

Structure des idéaux de $\mathbf{Z}$. Application au théorème de Bézout et au théorème de Gauss.

Dans l'anneau $\mathbf{Z}$, compatibilité de la relation de congruence modulo n avec la multiplication ; anneau $\mathbf{Z}/n\mathbf{Z}$, morphisme canonique de $\mathbf{Z}$ sur $\mathbf{Z}/n\mathbf{Z}$. Caractérisation des éléments inversibles de l'anneau $\mathbf{Z}/n\mathbf{Z}$.

Caractérisation du PGCD et du PPCM de deux entiers.

L'anneau $\mathbf{Z}/p\mathbf{Z}$ est un corps si et seulement si p est un nombre premier.

Factorisation d'un morphisme de l'anneau $\mathbf{Z}$ dans un anneau A , lorsque le noyau contient $n\mathbf{Z}$.

Définition de la caractéristique d'un corps.

c) Idéaux de $K[X]$

Dans ce paragraphe, on suppose que le corps de base K est un sous-corps de $\mathbf{C}$.
Les anneaux quotients de l'anneau $K[X]$ sont hors programme.

Structure des idéaux de $K[X]$. Application au théorème de Bézout et au théorème de Gauss.

Caractérisation du PGCD et du PPCM de deux polynômes.

Étant donnée une K -algèbre E , morphisme $P \mapsto P(a)$ de $K[X]$ dans E défini par un élément a de E . L'image de ce morphisme est la sous-algèbre $K[a]$ engendrée par a . Le noyau de ce morphisme est l'idéal des polynômes annulateurs de a .

Lorsque cet idéal n'est pas réduit à zéro, polynôme minimal π de a .
Si l'algèbre E est intègre, le polynôme π est irréductible.

Cet idéal n'est pas réduit à $\{0\}$ si et seulement si $K[a]$ est de dimension finie. La dimension de $K[a]$ est alors égale au degré r de π ; plus précisément, la famille a^n , où $0 \leq n < r$, est une base de $K[a]$.

Dans ces conditions, $P(a)$ est inversible si et seulement si P est premier avec π . L'inverse de $P(a)$ appartient alors à $K[a]$.
Lorsque E est intègre, $K[a]$ est un corps.

Travaux pratiques

§ Exemples d'étude de problèmes de divisibilité dans $\mathbf{Z}$, d'emploi d'idéaux de $\mathbf{Z}$, de congruences et de calculs dans $\mathbf{Z}/n\mathbf{Z}$.

En dehors du cas de $\mathbf{Z}/p\mathbf{Z}$, aucune connaissance spécifique sur les corps finis n'est exigible des étudiants.

Exemples d'étude de problèmes de divisibilité dans $K[X]$ et d'emploi d'idéaux de $K[X]$.

II. ALGÈBRE LINÉAIRE ET GÉOMÉTRIE AFFINE

Le programme est organisé autour de quatre objectifs.

- Consolider les acquis de la classe de première année : étude des concepts fondamentaux de l'algèbre linéaire (espaces vectoriels, sous-espaces vectoriels, applications linéaires, sous-espaces vectoriels supplémentaires et projecteurs, algèbres) ; étude des concepts fondamentaux relatifs aux espaces vectoriels de dimension finie (bases, dimension, rang, déterminants, calcul matriciel) et à la géométrie affine réelle (sous-espaces affines, barycentres, applications affines).
- Étudier de nouveaux concepts : somme directe de sous-espaces vectoriels, dualité, trace d'un endomorphisme, équivalence des matrices, formes bilinéaires symétriques, formes quadratiques.
- Exploiter les résultats obtenus pour l'étude de problèmes linéaires issus de l'algèbre (étude des systèmes linéaires, des polynômes, des algèbres ; interpolation, équations aux différences finies) et de l'analyse (réurrences linéaires et équations différentielles linéaires, en relation avec l'étude des systèmes dynamiques linéaires).
- Maîtriser les relations entre le point de vue géométrique (vecteurs et applications linéaires, points et applications affines) et le point de vue matriciel.

Il convient d'étudier conjointement l'algèbre linéaire et la géométrie affine et, dans les deux cas, d'illustrer les notions et les résultats par de nombreuses figures.

1- Espaces vectoriels, applications linéaires

Les espaces vectoriels considérés dans ce chapitre sont définis sur un sous-corps K de $\mathbf{C}$.

a) Bases, sommes directes

Définition d'une combinaison linéaire de vecteurs $(x_i)_{i \in I}$ d'un espace vectoriel E indexés par un ensemble I .

Définition d'une famille libre, d'une famille liée, d'une famille génératrice, d'une base de E ; coordonnées (ou composantes) d'un vecteur dans une base.

Base canonique de l'espace vectoriel $K[X]$.

Étant donné un espace vectoriel E muni d'une base $(e_i)_{i \in I}$ et une famille $(f_i)_{i \in I}$ de vecteurs d'un espace vectoriel F , il existe une application linéaire u de E dans F et une seule telle que $u(e_i) = f_i$.

Somme directe de sous-espaces vectoriels : définition de la somme $\sum E_i$ d'une famille finie $(E_i)_{i \in I}$ de sous-espaces vectoriels d'un espace vectoriel E ; définition d'une somme directe $\oplus E_i$ d'une telle famille. Cas des sous-espaces vectoriels supplémentaires.

Lorsque E est de dimension finie et que la somme $\sum E_i$ est directe,

$$\dim \bigoplus_i E_i = \sum_i \dim E_i.$$

Lorsque $E = \oplus E_i$ alors, pour toute famille u_i d'applications linéaires de E_i dans un espace vectoriel F , il existe une application linéaire u de E dans F et une seule telle que, pour tout i , u_i soit la restriction de u à E_i .

Définition d'une base d'un espace vectoriel E de dimension finie adaptée à un sous-espace vectoriel F de E , à une décomposition en somme directe $E = \oplus E_i$.

b) Image et noyau d'une application linéaire

Une application linéaire u de E dans F définit un isomorphisme de tout supplémentaire E' de $\text{Ker } u$ sur $\text{Im } u$.

Il s'agit d'une brève extension des notions limitées en première année au cas d'un ensemble I fini. Tout théorème général d'existence de bases et de sous-espaces supplémentaires en dimension quelconque est hors programme.

Algèbre des fonctions polynomiales sur $\mathbf{R}^n$ ou $\mathbf{C}^n$; base canonique de cette algèbre.

La donnée d'une famille de p vecteurs $(x_1, x_2, \dots, x_p)$ d'un K -espace vectoriel E détermine une application linéaire u de K^p dans E ; noyau et image de cette application ; caractérisation de la bijectivité, de l'injectivité et de la surjectivité de u .

Dans l'espace vectoriel $K[X]$, le sous-espace vectoriel $K[X]P$ constitué des multiples d'un polynôme P de degré $n+1$ admet pour supplémentaire le sous-espace vectoriel $K_n[X]$ constitué des polynômes de degré inférieur ou égal à n .

Alors, pour que $E = \oplus E_i$, il faut et il suffit que

$$\dim E = \sum_i \dim E_i.$$

Famille (p_i) de projecteurs de E associée à une décomposition $E = \oplus E_i$; relations $p_i^2 = p_i$, $p_i p_j = 0$ si $j \neq i$ et $\text{Id}_E = \sum p_i$.

Application à l'interpolation de Lagrange : détermination des polynômes P prenant des valeurs données sur une famille $(a_0, a_1, \dots, a_n)$ d'éléments de K distincts deux à deux.

Étant donné un sous-espace vectoriel E' de E et deux sous-espaces supplémentaires F_1 et F_2 de E' dans E , le projecteur de E sur F_1 parallèlement à E' définit un isomorphisme de F_2 sur F_1 .

Lorsque F est de dimension finie, définition du rang d'une application linéaire u de E dans F . Alors $\text{Ker } u$ est de codimension finie dans E et

$$\text{rg}(u) = \dim \text{Im } u = \text{codim } \text{Ker } u.$$

Définition de l'espace dual E^* d'un espace vectoriel E .

Étant donnée une forme linéaire φ sur E non nulle, le sous-espace vectoriel $H = \text{Ker } \varphi$ est un hyperplan de E ; toute forme linéaire ψ nulle sur H est colinéaire à φ .

c) Dualité en dimension finie

Les espaces vectoriels considérés dans ce paragraphe sont de dimension finie. La notion d'espace bidual est hors programme.

Étant donné un vecteur e non nul d'un espace vectoriel E de dimension finie n , il existe une forme linéaire φ sur E telle que $\varphi(e) = 1$.

Formes linéaires coordonnées $(\varphi_1, \varphi_2, \dots, \varphi_n)$ associées à une base $B = (e_1, e_2, \dots, e_n)$ de E . Les formes linéaires coordonnées constituent une base B^* de E^* , appelée base duale de B . La dimension de E^* est égale à n .

La donnée d'une famille $(e_1, e_2, \dots, e_p)$ d'éléments de E définit une application linéaire u de E^* dans K^p .

Si $(e_1, e_2, \dots, e_n)$ est une base de E , u est un isomorphisme.

Pour que $(e_1, e_2, \dots, e_p)$ soit libre, il faut et il suffit que u soit surjective; dans ces conditions, $\text{Ker } u$ est de codimension p et tout vecteur x de E sur lequel les éléments de $\text{Ker } u$ s'annulent est combinaison linéaire des vecteurs e_j .

La donnée d'une famille $(\varphi_1, \varphi_2, \dots, \varphi_p)$ de formes linéaires sur un espace vectoriel E de dimension n définit une application linéaire u de E dans K^p .

Si $(\varphi_1, \varphi_2, \dots, \varphi_n)$ est une base de E^* , u est un isomorphisme.

Pour que $(\varphi_1, \varphi_2, \dots, \varphi_p)$ soit libre, il faut et il suffit que u soit surjective; dans ces conditions, $\text{Ker } u$ est de codimension p dans E et toute forme linéaire φ s'annulant sur $\text{Ker } u$ est combinaison linéaire des formes linéaires φ_i .

e) Trace d'un endomorphisme

Trace d'une matrice carrée; linéarité de la trace, relations $\text{Tr } AB = \text{Tr } BA$, $\text{Tr } PMP^{-1} = \text{Tr } M$. Trace d'un endomorphisme d'un espace vectoriel de dimension finie.

Soit u l'application de $K[X]$ dans K^{n+1} définie par $u(P) = (P(a_0), P(a_1), \dots, P(a_n))$. Le noyau de u est constitué des multiples du polynôme $N = \prod (X - a_j)$; en outre, u définit un isomorphisme de $K_n[X]$ sur K^{n+1} .

Définition d'un sous-espace vectoriel E' de codimension finie dans E , d'un hyperplan. Lorsque E est de dimension finie,

$$\dim E' + \text{codim } E' = \dim E.$$

Lorsque E est de dimension finie, relation

$$\dim \text{Im } u + \dim \text{Ker } u = \dim E;$$

caractérisation des isomorphismes à l'aide du rang. Invariance du rang par composition avec un isomorphisme.

Forme bilinéaire canonique $(\varphi, x) \mapsto \langle \varphi, x \rangle$ sur $E^* \times E$.

Équations d'un hyperplan.

Le vecteur nul est le seul vecteur de E sur lequel toute forme linéaire s'annule.

Dans ces conditions, B et B^* vérifient les relations d'orthogonalité de Kronecker

$$\varphi_i(e_j) = \delta_i^j$$

où $\delta_i^j = 1$ si $j = i$ et $\delta_i^j = 0$ sinon.

Le noyau de u est constitué des formes linéaires s'annulant sur les vecteurs e_j .

Application à l'obtention d'une famille d'équations d'un sous-espace vectoriel ou d'un sous-espace affine de E .

Le noyau de u est l'intersection des noyaux respectifs H_i des formes linéaires φ_i .

Dans ces conditions, il existe une base $(e_1, e_2, \dots, e_n)$ de E et une seule dont $(\varphi_1, \varphi_2, \dots, \varphi_n)$ est la base duale.

Application à l'étude de l'intersection d'une famille $(H_1, H_2, \dots, H_p)$ d'hyperplans de E .

Le rang d'un projecteur est égal à sa trace.

f) Calcul matriciel et systèmes d'équations linéaires

Définition des matrices équivalentes ; caractérisation de l'équivalence des matrices à l'aide du rang.

Opérations élémentaires sur les lignes et les colonnes d'une matrice ; interprétation en termes de produits matriciels. Application à la recherche du rang d'une matrice, à la résolution des systèmes linéaires, à la recherche de l'inverse d'une matrice carrée, au calcul des déterminants.

Application de la dualité à l'étude d'un système d'équations linéaires $\varphi_i(x) = b_i$.

Toute matrice M de rang r est équivalente à la matrice $J_r = (\alpha_{i,j})$, où $\alpha_{j,j} = 1$ si $1 \leq j \leq r$, et $\alpha_{i,j} = 0$ sinon.

Interprétation géométrique.

2- Formes bilinéaires symétriques et formes quadratiques

L'objectif de ce chapitre est double :

- Introduire les concepts de forme bilinéaire symétrique et de forme quadratique.
- En dimension finie, étudier la décomposition en carrés d'une forme quadratique et ses applications à l'algèbre.

Dans ce chapitre, le corps de base est $\mathbf{R}$.

a) Formes bilinéaires symétriques

Espace vectoriel des formes bilinéaires symétriques sur un $\mathbf{R}$ -espace vectoriel E . Espace vectoriel des formes quadratiques associées ; polarisation.

Définition des formes bilinéaires symétriques positives, des formes quadratiques positives ; inégalité de Cauchy-Schwarz. Cas des formes définies positives.

b) Réduction d'une forme quadratique

Dans ce paragraphe, les espaces vectoriels considérés sont de dimension finie. Les notions d'orthogonalité et de vecteur isotrope sont hors programme.

Matrice associée à une forme bilinéaire symétrique (à une forme quadratique) dans une base de E .

Définition du rang d'une forme bilinéaire symétrique (d'une forme quadratique) ; définition d'une forme non dégénérée.

Décomposition en carrés (méthode de Gauss). Interprétation matricielle. Signature d'une forme quadratique, théorème d'inertie de Sylvester.

Effet d'un changement de base sur cette matrice ; définition des matrices congruentes.

La démonstration du théorème d'inertie n'est pas exigible des étudiants.

Travaux pratiques

Exemples d'étude de l'indépendance linéaire d'une famille de vecteurs. Exemples de construction de bases et de sous-espaces vectoriels supplémentaires, et d'emploi de bases, de supplémentaires, de sommes directes et de changements de bases, notamment pour l'étude des équations linéaires.

Exemples d'emploi de la dualité.

§ Exemples d'étude de problèmes d'interpolation linéaire.

§ Exemples d'étude de systèmes d'équations linéaires.

§ Emploi des opérations élémentaires sur les lignes et les colonnes d'une matrice à coefficients numériques pour la résolution des systèmes de Cramer par l'algorithme du pivot partiel, le calcul de déterminants, l'inversion des matrices.

§ Exemples d'obtention et d'emploi de la décomposition en carrés d'une forme quadratique.

Il convient d'exploiter les espaces vectoriels d'endomorphismes, de matrices, de polynômes, de suites et de fonctions.

Il convient de valoriser les interventions en géométrie.

III. RÉDUCTION DES ENDOMORPHISMES

Cette partie est organisée autour de quatre objectifs :

- Étudier les polynômes d'un endomorphisme u et les sous-espaces stables par u .
- Étudier les valeurs propres et les sous-espaces propres d'un endomorphisme, en dimension finie ou non.
- Étudier les endomorphismes diagonalisables et les endomorphismes trigonalisables, en dimension finie.
- Exploiter les résultats obtenus pour l'étude de problèmes issus de l'algèbre, de l'analyse et de la géométrie.

En outre, le programme associe étroitement le point de vue géométrique et le point de vue matriciel.

Dans cette partie, le corps de base $\mathbf{K}$ est $\mathbf{R}$ ou $\mathbf{C}$.

1- Sous-espaces stables, polynômes d'un endomorphisme

a) Sous-espaces stables

Définition d'un sous-espace vectoriel F stable par un endomorphisme u d'un espace vectoriel E . Endomorphisme de F induit par u .

Si E est de dimension finie, caractérisation des endomorphismes de E stabilisant un sous-espace vectoriel F par leur matrice dans une base de E adaptée à F .

Étant donné un espace vectoriel E de dimension finie et une famille $(E_1, E_2, \dots, E_p)$ de sous-espaces vectoriels dont E est somme directe, caractérisation des endomorphismes stabilisant les sous-espaces E_j par leur matrice dans une base de E adaptée à cette décomposition. Déterminant d'un tel endomorphisme, d'une matrice diagonale par blocs.

Définition d'un drapeau $(E_1, E_2, \dots, E_n)$ de sous-espaces vectoriels d'un espace vectoriel E de dimension n ; caractérisation des endomorphismes stabilisant les sous-espaces E_j par leur matrice dans une base de E adaptée à ce drapeau.

b) Polynômes d'un endomorphisme

La donnée d'un endomorphisme u de E définit un morphisme $P \mapsto P(u)$ de l'algèbre $\mathbf{K}[X]$ dans l'algèbre $\mathcal{L}(E)$. Noyau et image de ce morphisme. Idéal des polynômes annulateurs de u . En dimension finie, existence du polynôme minimal de u .

Théorème de décomposition des noyaux : si P et Q sont premiers entre eux, $\text{Ker } PQ(u) = \text{Ker } P(u) \oplus \text{Ker } Q(u)$.

Si les endomorphismes u et v commutent, $\text{Im } u$ et $\text{Ker } u$ sont stables par v .

Déterminant d'une matrice de la forme $\begin{pmatrix} A & C \\ 0 & D \end{pmatrix}$.

Étant donnée une base d'un espace vectoriel E de dimension finie, caractérisation géométrique des endomorphismes dont la matrice dans cette base est diagonale.

Étant donnée une base d'un espace vectoriel E de dimension finie, caractérisation géométrique des endomorphismes dont la matrice dans cette base est triangulaire supérieure.

Pour tout élément P de $\mathbf{K}[X]$, $\text{Im } P(u)$ et $\text{Ker } P(u)$ sont stables par u .

Extension au cas d'une famille finie de polynômes premiers entre eux deux à deux.

2- Réduction d'un endomorphisme

a) Valeurs propres, vecteurs propres d'un endomorphisme

Droites stables par un endomorphisme u d'un $\mathbf{K}$ -espace vectoriel E . Définition des valeurs propres, des vecteurs propres (le vecteur 0 n'est pas un vecteur propre), des sous-espaces propres $E_\lambda(u) = \text{Ker } (u - \lambda \text{Id}_E)$ d'un endomorphisme u de E .

Si les endomorphismes u et v commutent, les sous-espaces propres $E_\lambda(u)$ sont stables par v .

Toute famille de vecteurs propres associés à des valeurs propres distinctes deux à deux est libre.

Étant donné un endomorphisme u de E et un élément P de $\mathbf{K}[X]$, pour toute valeur propre λ de u , $P(\lambda)$ est une valeur propre de $P(u)$. Si $P(u) = 0$, alors toute valeur propre de u est un zéro du polynôme P .

La notion de valeur spectrale est hors programme.

En dimension finie, λ est une valeur propre de u si et seulement si $u - \lambda \text{Id}_E$ n'est pas inversible; l'ensemble des valeurs propres de u est alors appelé spectre de u et noté $\text{Sp } (u)$.

La somme d'une famille finie de sous-espaces propres associés à des valeurs propres distinctes deux à deux est directe.

Éléments propres des homothéties, des projecteurs, des affinités, des symétries.

Valeurs propres et sous-espaces propres de l'endomorphisme induit par u sur un sous-espace vectoriel stable.

En dimension finie, automorphisme $u \mapsto auu^{-1}$ de l'algèbre $\mathcal{L}(E)$ défini par un élément a du groupe linéaire $\text{GL}(E)$.

Relation entre les valeurs propres (les sous-espaces propres) de u et de auu^{-1} .

b) Valeurs propres, vecteurs propres d'une matrice carrée

Définition des valeurs propres, des sous-espaces propres, des vecteurs propres et du spectre d'un élément M de $\mathcal{M}_n(\mathbf{K})$. Un élément M de $\mathcal{M}_n(\mathbf{R})$ peut être considéré comme élément de $\mathcal{M}_n(\mathbf{C})$; le spectre de M dans $\mathbf{R}$ est contenu dans le spectre de M dans $\mathbf{C}$.

Les éléments propres de M sont définis comme étant ceux de l'endomorphisme u de $\mathbf{K}^n$ canoniquement associé à M .

Automorphisme $M \mapsto PMP^{-1}$ de l'algèbre $\mathcal{M}_n(\mathbf{K})$. Définition des matrices semblables; interprétation géométrique.

Spectre de deux matrices semblables.

c) Polynôme caractéristique

Polynôme caractéristique d'une matrice, d'un endomorphisme u d'un espace vectoriel E de dimension finie. Ordre de multiplicité d'une valeur propre.

Lorsque ce polynôme est scindé, expression de la trace et du déterminant en fonction des valeurs propres.

Polynôme caractéristique de l'endomorphisme induit par u sur un sous-espace vectoriel stable par u .

Cas où u stabilise une famille $(E_1, E_2, \dots, E_p)$ de sous-espaces vectoriels dont E est somme directe.

Théorème de Cayley-Hamilton.

La démonstration de ce théorème n'est pas exigible des étudiants.

d) Réduction d'un endomorphisme en dimension finie

Définition d'un endomorphisme u diagonalisable: l'espace vectoriel E est somme (directe) des sous-espaces propres $E_\lambda(u)$. Projecteurs p_λ associés; relation $u = \sum_\lambda \lambda p_\lambda$.

Un endomorphisme u est diagonalisable si et seulement s'il existe une base formée de vecteurs propres de u , ou encore s'il existe une base dans laquelle la matrice de u est diagonale.

Inversement, si E est somme directe de sous-espaces vectoriels stables E_j sur lesquels u induit une homothétie, alors u est diagonalisable.

Pour qu'un endomorphisme u de E soit diagonalisable, il faut et il suffit que la somme des dimensions des sous-espaces propres de u soit égale à $\dim E$.

Tout endomorphisme dont le polynôme caractéristique est scindé et a toutes ses racines simples est diagonalisable, et ses sous-espaces propres sont de dimension 1.

Pour qu'un endomorphisme u de E soit diagonalisable, il faut et il suffit qu'il annule un polynôme scindé dont toutes les racines sont simples.

Si u est diagonalisable, pour tout sous-espace vectoriel F de E stable par u , l'endomorphisme de F induit par u l'est aussi.

Définition d'un endomorphisme u trigonalisable: il existe une base telle que la matrice associée à u dans cette base soit triangulaire supérieure.

Tout endomorphisme dont le polynôme caractéristique est scindé est trigonalisable.

Pour qu'un endomorphisme u de E soit trigonalisable, il faut et il suffit qu'il annule un polynôme scindé.

Aucune connaissance spécifique sur la notion de sous-espace caractéristique n'est exigible des étudiants. La réduction de Jordan est hors programme.

Définition d'une matrice carrée M diagonalisable, trigonalisable. Pour que M soit diagonalisable (resp. trigonalisable), il faut et il suffit que M soit semblable à une matrice diagonale (resp. triangulaire supérieure).

Lorsque M est diagonalisable, M s'écrit sous la forme PDP^{-1} , où D est diagonale et où P désigne la matrice de passage de la base canonique de $\mathbf{K}^n$ à une base de vecteurs propres de M . Cas des matrices trigonalisables.

Travaux pratiques

§ Exemples d'emploi du théorème de décomposition des noyaux (étude d'endomorphismes ou de matrices annulant un polynôme, recherche de bases de l'espace vectoriel des solutions d'une équation aux différences finies ou d'une équation différentielle linéaire homogène à coefficients constants).

Exemples d'étude et d'emploi de sous-espaces stables par un endomorphisme.

§ Exemples de réduction à la forme diagonale ou triangulaire de matrices carrées sur $\mathbf{C}$ ou sur $\mathbf{R}$.

§ Exemples d'étude du comportement des puissances d'une matrice.

Les étudiants doivent savoir déterminer les suites satisfaisant à une relation de récurrence $u_{n+2} = a u_{n+1} + b u_n$.

Exemples d'emploi de décompositions en blocs (produits, matrices diagonales par blocs, triangulaires par blocs).

Il convient notamment d'exploiter l'étude de systèmes dynamiques discrets.

IV. ESPACES EUCLIDIENS, GÉOMÉTRIE EUCLIDIENNE, ESPACES HERMITIENS

Cette partie est organisée autour de quatre objectifs :

- *Consolider les acquis de la classe de première année sur le produit scalaire, les espaces vectoriels euclidiens et la géométrie euclidienne du plan et de l'espace.*

- *Étudier de nouveaux concepts : somme directe orthogonale de sous-espaces vectoriels ; dans un espace euclidien, adjoint d'un endomorphisme, réduction des endomorphismes autoadjoints et des matrices symétriques, réduction d'une forme quadratique dans une base orthonormale ; notions sur les espaces préhilbertiens complexes et les espaces hermitiens.*

- *Maîtriser les relations entre le point de vue géométrique (vecteurs, endomorphismes autoadjoints, automorphismes orthogonaux) et le point de vue matriciel.*

- *Exploiter les résultats obtenus pour l'étude de problèmes issus de l'algèbre, de l'analyse et de la géométrie.*

Il convient d'étudier conjointement les espaces vectoriels euclidiens et la géométrie euclidienne du plan et de l'espace et, dans les deux cas, d'illustrer les notions et les résultats par de nombreuses figures.

1- Espaces préhilbertiens réels

L'objectif est de consolider et approfondir les notions de base abordées en classe de première année : produit scalaire, norme et distance associées, orthogonalité, sous-espaces supplémentaires orthogonaux, projecteurs orthogonaux, sommes directes orthogonales.

a) Produit scalaire

Produit scalaire sur un $\mathbf{R}$ -espace vectoriel ; définition d'un espace préhilbertien réel. Inégalité de Cauchy-Schwarz, inégalité triangulaire ; norme et distance associées.

Relations entre produit scalaire et norme, polarisation.

L'étude de ces notions doit être illustrée par de nombreux exemples, notamment le produit scalaire canonique de $\mathbf{R}^n$ et les produits scalaires usuels sur les espaces de suites et de fonctions.

b) Orthogonalité

Vecteurs unitaires. Vecteurs orthogonaux, sous-espaces vectoriels orthogonaux, orthogonal F° (ou $F^\perp$) d'un sous-espace vectoriel F de E .

Sous-espaces vectoriels supplémentaires orthogonaux, projecteurs orthogonaux.

Somme directe orthogonale d'une famille finie de sous-espaces vectoriels.

Familles orthogonales, familles orthonormales ; relation de Pythagore pour une famille orthogonale finie.

Projecteurs orthogonaux associés à une décomposition de E en somme directe orthogonale.

2- Espaces euclidiens

Ce chapitre est organisé autour de quatre objectifs :

- Consolider l'étude des espaces vectoriels euclidiens (bases orthonormales, automorphismes orthogonaux, matrices orthogonales) et de la géométrie euclidienne du plan et de l'espace (distances, angles, isométries, déplacements, similitudes directes du plan).
- Étudier la projection orthogonale d'un vecteur d'un espace préhilbertien réel (de dimension finie ou non) sur un sous-espace vectoriel de dimension finie.
- Étudier le concept d'adjoint d'un endomorphisme.
- Étudier la réduction des endomorphismes autoadjoints d'un espace vectoriel euclidien et ses applications à la réduction des formes quadratiques sur un tel espace.

a) Bases orthonormales

Définition d'un espace vectoriel euclidien : espace préhilbertien réel de dimension finie.

Existence de bases orthonormales, complétion d'une famille orthonormale en une base orthonormale.

Isomorphisme de E sur l'espace dual E^* .

Expressions dans une base orthonormale des coordonnées et de la norme d'un vecteur, du produit scalaire de deux vecteurs, de la distance de deux points, de la trace et du déterminant d'un endomorphisme.

b) Projections orthogonales

Dans un espace préhilbertien réel E (de dimension finie ou non), l'orthogonal F° d'un sous-espace vectoriel F de dimension finie est un supplémentaire de ce sous-espace vectoriel, appelé supplémentaire orthogonal de F ; définition de la projection orthogonale $p_F(x)$ d'un vecteur x de E sur F . En outre,

$$\text{codim } F^\circ = \dim F \quad \text{et} \quad F^{\circ\circ} = F.$$

Définition de la distance $d(x, F)$ d'un élément x de E à F . Expression de cette distance à l'aide de $p_F(x)$: la fonction qui, à tout élément z de F associe $\|x - z\|$ atteint son minimum en un point et un seul, à savoir $p_F(x)$; relation

$$\|x\|^2 = \|p_F(x)\|^2 + d(x, F)^2.$$

c) Adjoint d'un endomorphisme

Dans ce paragraphe, les espaces vectoriels considérés sont euclidiens.

Définition de l'adjoint u^* d'un endomorphisme u de E par la relation $(u^*(x)|y) = (x|u(y))$; existence et unicité de l'adjoint. Noyau, image et rang de l'adjoint :

$$\text{Ker } u^* = (\text{Im } u)^\circ, \quad \text{Im } u^* = (\text{Ker } u)^\circ, \quad \text{rg}(u^*) = \text{rg}(u).$$

Matrice associée à u^* dans une base orthonormale. Relations $\text{Tr}(u^*) = \text{Tr}(u)$ et $\text{Det}(u^*) = \text{Det}(u)$.

Définition d'un endomorphisme autoadjoint (ou symétrique) par la relation $(u(x)|y) = (x|u(y))$. Les endomorphismes autoadjoints constituent un sous-espace vectoriel de $\mathcal{L}(E)$.

Définition d'un endomorphisme autoadjoint positif par la relation $(u(x)|x) \geq 0$, d'un endomorphisme autoadjoint défini positif.

Existence d'une base orthonormale adaptée à un drapeau.

Toute forme linéaire f sur un espace vectoriel euclidien E s'écrit de manière unique sous la forme $f(x) = (a|x)$ où a est un vecteur de E .

La donnée d'une base orthonormale d'un espace vectoriel euclidien E de dimension n détermine un isomorphisme de $\mathbf{R}^n$ (muni du produit scalaire canonique) sur E .

Expression de $p_F(x)$ lorsque F est muni d'une base orthonormale $(e_1, e_2, \dots, e_n)$:

$$p_F(x) = \sum_{j=1}^n (e_j|x) e_j.$$

Inégalité de Bessel :

$$\sum_{j=1}^n |(e_j|x)|^2 \leq \|x\|^2.$$

L'application $u \mapsto u^*$ est un automorphisme involutif de l'espace vectoriel $\mathcal{L}(E)$; relation $(uv)^* = v^*u^*$.

Pour qu'un sous-espace vectoriel F de E soit stable par un endomorphisme u , il faut et il suffit que F° soit stable par u^* .

Caractérisation par la relation $u^* = u$. Caractérisation des projecteurs orthogonaux par les relations $p^2 = p$ et $p^* = p$.

Pour tout endomorphisme u , u^*u et uu^* sont autoadjoints positifs. Cas où u est un automorphisme.

Automorphismes orthogonaux, groupe orthogonal $O(E)$. Rotations, groupe spécial orthogonal $SO(E)$.

Étant donnés deux vecteurs unitaires distincts a et b de E , écriture de la réflexion $s_{a,b}$ échangeant a et b sous la forme

$$s_{a,b}(x) = x - 2(e|x)e,$$

où e est le vecteur unitaire associé à $b - a$.

Caractérisation d'un endomorphisme autoadjoint, d'un automorphisme orthogonal, à l'aide de la matrice associée dans une (toute) base orthonormale.

d) Réduction des endomorphismes autoadjoints

Étant donné un endomorphisme autoadjoint u d'un espace euclidien E , cet espace est somme directe orthogonale des sous-espaces propres de u ; en particulier, u est diagonalisable dans une base orthonormale.

Spectre d'un endomorphisme autoadjoint positif, défini positif.

Endomorphisme autoadjoint associé à une forme bilinéaire symétrique (ou à une forme quadratique) sur un espace euclidien E ; réduction de cette forme dans une base orthonormale de E .

Caractérisation des automorphismes orthogonaux par la relation $u^*u = uu^* = I_E$.

Étant données deux droites distinctes $D = \mathbf{R}a$ et $D' = \mathbf{R}b$ de E , les réflexions échangeant D et D' sont $s_{a,b}$ et $s_{a,-b}$.

Cas d'un endomorphisme autoadjoint positif, défini positif; définition des matrices symétriques positives, définies positives.

Diagonalisation d'une matrice symétrique au moyen d'une matrice orthogonale.

3- Espaces préhilbertiens complexes, espaces hermitiens

L'objectif est triple :

- Étendre au cas du corps des nombres complexes la notion de produit scalaire, de norme associée et de somme directe orthogonale.
- Étendre au cas des espaces vectoriels hermitiens les notions concernant les espaces vectoriels euclidiens : bases orthonormales, projection orthogonale.
- Maîtriser les relations entre le point de vue géométrique et le point de vue matriciel.

a) Espaces préhilbertiens complexes

Produit scalaire $(x, y) \mapsto (x|y)$ sur un $\mathbf{C}$ -espace vectoriel (linéaire à droite, semi-linéaire à gauche); définition d'un espace vectoriel préhilbertien complexe. Inégalité de Cauchy-Schwarz, inégalité triangulaire; norme et distance associées.

Relations entre produit scalaire et norme :

$$\|x + y\|^2 = \|x\|^2 + \|y\|^2 + 2 \operatorname{Re} (x|y),$$

$$\|x - y\|^2 = \|x\|^2 + \|y\|^2 - 2 \operatorname{Re} (x|y),$$

$$\|x + y\|^2 + \|x - y\|^2 = 2(\|x\|^2 + \|y\|^2)$$

(identité du parallélogramme),

$$\|x + y\|^2 - \|x - y\|^2 = 4 \operatorname{Re} (x|y),$$

$$4(x|y) = \|y + x\|^2 - \|y - x\|^2 + i\|y + ix\|^2 - i\|y - ix\|^2$$

(identité de polarisation).

Vecteurs unitaires. Vecteurs orthogonaux, sous-espaces vectoriels orthogonaux, orthogonal d'un sous-espace vectoriel.

Sous-espaces vectoriels supplémentaires orthogonaux, projecteurs orthogonaux, somme directe orthogonale d'une famille finie de sous-espaces vectoriels.

L'étude de ces notions doit être illustrée par de nombreux exemples, et notamment :

- le produit scalaire canonique de $\mathbf{C}^n$;
- le produit scalaire canonique sur l'espace ℓ^2 des suites de carré sommable;
- $(f, g) \mapsto (f|g) = \int_{[a,b]} \bar{f}g$ dans $\mathcal{C}([a, b])$;
- $(f, g) \mapsto (f|g) = \frac{1}{2\pi} \int_{[0, 2\pi]} \bar{f}g$ dans l'espace vectoriel $\mathcal{C}_{2\pi}$ des fonctions continues 2π -périodiques sur $\mathbf{R}$ à valeurs complexes.

Familles orthogonales, familles orthonormales; relation de Pythagore pour une famille orthogonale finie.

b) Espaces vectoriels hermitiens

Définition d'un espace vectoriel hermitien : espace préhilbertien complexe de dimension finie. Existence de bases orthonormales, complétion d'une famille orthonormale en une base orthonormale.

Dans un espace préhilbertien complexe E (de dimension finie ou non), existence du supplémentaire orthogonal F° d'un sous-espace vectoriel F de dimension finie ; définition de la projection orthogonale $p_F(x)$ d'un vecteur x de E sur F . En outre,

$$\text{codim } F^\circ = \dim F \quad \text{et} \quad F^{\circ\circ} = F.$$

Définition de la distance $d(x, F)$ d'un élément x de E à F . Relation

$$\|x\|^2 = \|p_F(x)\|^2 + d(x, F)^2.$$

Toute forme linéaire f sur un espace vectoriel hermitien E s'écrit de manière unique sous la forme $f(x) = (a|x)$ où a est un vecteur de E .

Expression de $p_F(x)$ lorsque F est muni d'une base orthonormale :

$$p_F(x) = \sum_{j=1}^n (e_j|x) e_j.$$

Inégalité de Bessel.

Travaux pratiques

§ Exemples de construction et d'emploi de bases orthonormales et de supplémentaires orthogonaux. Orthonormalisation d'une famille libre par la méthode de Schmidt.

Exemples de calcul et d'emploi de la projection orthogonale sur un sous-espace de dimension finie, de la distance à un tel sous-espace.

Exemples d'étude et d'emploi de suites de polynômes orthogonaux.

Exemples de réduction d'endomorphismes et de matrices en base orthonormale.

Recherche d'une équation réduite d'une conique définie par une équation cartésienne dans un repère orthonormal ; exemples d'une telle recherche pour une quadrique.

Description des quadriques usuelles (en dimension 3) définies par une équation cartésienne réduite en repère orthonormal : ellipsoïdes, hyperboloïdes (à une nappe et à deux nappes), paraboloïdes (elliptiques et hyperboliques), cônes, cylindres (elliptiques, hyperboliques et paraboliques). Génération d'un hyperboloïde de révolution à une nappe et d'un paraboloïde hyperbolique par une famille de droites.

Il convient d'exploiter les espaces vectoriels $\mathbf{R}^n$ et $\mathbf{C}^n$ ainsi que les espaces vectoriels de polynômes, de suites et de fonctions.

Il convient notamment d'exploiter l'approximation des fonctions.

Aucune connaissance spécifique sur les propriétés des polynômes orthogonaux n'est exigible des étudiants.

Il convient de mettre en valeur les applications à l'analyse et à la géométrie euclidienne.

Les étudiants doivent savoir reconnaître sur l'équation réduite les éléments de symétrie et les quadriques de révolution. Aucune autre connaissance spécifique sur les quadriques n'est exigible.

ANALYSE ET GÉOMÉTRIE DIFFÉRENTIELLE

Le programme est organisé autour des concepts fondamentaux de suite (ou de série) et de fonction, qui permettent de modéliser le comportement des phénomènes discrets et des phénomènes continus. Les interactions entre le continu et le discret sont mises en valeur.

Le programme se place dans le cadre des espaces vectoriels normés, qui permet notamment de décrire et d'étudier les notions de limite et de continuité, ainsi que les modes de convergence usuels des suites et des séries de fonctions.

La maîtrise du calcul différentiel et intégral à une variable et de ses interventions en géométrie différentielle constitue un objectif essentiel. L'intégration, la représentation des fonctions, notamment par des séries (séries entières, séries de Fourier) et par des intégrales dépendant d'un paramètre, l'approximation des fonctions, les équations différentielles (notamment les systèmes linéaires et les systèmes autonomes, en relation avec la géométrie différentielle), le calcul différentiel à plusieurs variables (également en interaction étroite avec la géométrie différentielle et l'analyse vectorielle) tiennent une place majeure.

Le programme d'analyse combine l'étude des problèmes qualitatifs avec celle de problèmes quantitatifs. Il développe conjointement l'étude globale des suites et des fonctions et l'étude de leur comportement local ou asymptotique ; en particulier, il convient de mettre en valeur le caractère local des notions de limite, de continuité, de dérivabilité et de différentiabilité. Enfin, pour l'étude des solutions des équations, le programme associe les problèmes d'existence et d'unicité, les méthodes de calcul exact, les méthodes d'approximation et les algorithmes de mise en œuvre.

En analyse, les majorations et les encadrements jouent un rôle essentiel. Tout au long de l'année, il convient donc de dégager les méthodes usuelles d'obtention de majorations et de minoration : opérations sur les inégalités, emploi de la valeur absolue, du module ou d'une norme, emploi du calcul différentiel et intégral. Pour comparer des nombres, des suites ou des fonctions, on utilise systématiquement des inégalités larges (qui sont compatibles avec le passage à la limite), en réservant les inégalités strictes aux cas où elles sont indispensables.

En ce qui concerne l'usage des quantificateurs, il convient d'entraîner les étudiants à savoir les employer pour formuler de façon précise certains énoncés et leurs négations. En revanche, il convient d'éviter tout recours systématique aux quantificateurs. A fortiori, leur emploi abusif (notamment sous forme d'abréviations dans un texte) est exclu.

Le programme d'analyse et géométrie différentielle comporte la construction, l'analyse et l'emploi d'algorithmes numériques relatifs aux suites et aux fonctions, ainsi que l'emploi du logiciel de calcul symbolique et formel.

I. SUITES ET FONCTIONS

Cette partie est organisée autour de quatre objectifs :

- Étudier les concepts élémentaires relatifs aux espaces vectoriels normés, en vue de fournir un cadre cohérent pour l'étude des suites, des séries et des fonctions.
- Étudier le comportement global et asymptotique d'une suite ou d'une fonction, en relation avec les systèmes dynamiques discrets ou continus.
- Décrire et mettre en œuvre des algorithmes d'approximation d'un nombre ou d'un vecteur à l'aide de suites ou de séries et comparer leurs performances. Cette étude est menée en relation avec celle des fonctions et de l'algèbre linéaire, et avec les problèmes de mesure de grandeurs géométriques ou physiques.
- Exploiter les résultats de la théorie des fonctions pour l'étude de problèmes numériques (majorations d'expressions, problèmes d'optimisation, solutions d'équations numériques, ...).

1- Espaces vectoriels normés réels ou complexes

L'objectif de ce chapitre est double :

- Étudier les concepts de norme et de distance associée, de suite convergente, de topologie d'un espace vectoriel normé, de limite et de continuité d'une application.
- Introduire les notions de complétude et de compacité dans un espace vectoriel normé.

Ces notions doivent être illustrées par de nombreux exemples issus de l'espace $\mathbf{K}^n$, des espaces vectoriels d'endomorphismes, de matrices, de suites et de fonctions ; en revanche, l'étude systématique des espaces vectoriels normés n'est pas un objectif du programme.

En ce qui concerne le comportement global et asymptotique d'une suite, il convient de combiner l'étude de problèmes qualitatifs (monotonie, convergence, divergence...) avec celle de problèmes quantitatifs (majorations,

encadrements, vitesse de convergence ou de divergence par comparaison aux suites de référence usuelles, accélération de convergence...).

De même, en ce qui concerne le comportement global et local (ou asymptotique) d'une fonction, il convient de combiner l'étude de problèmes qualitatifs (monotonie, existence de zéros, existence d'extrémums, existence de limites, continuité, dérivabilité...) avec celle de problèmes quantitatifs (majorations, encadrements, caractère lipschitzien, comparaison aux fonctions de référence au voisinage d'un point...).

Les applications étudiées dans ce chapitre sont définies sur une partie A d'un espace vectoriel normé E et à valeurs dans un autre F . Les notions d'espace métrique et d'espace topologique sont hors programme.

Dans un souci d'unification, une propriété portant sur une fonction définie sur A est dite vraie au voisinage d'un point a si elle est vraie sur l'intersection de A avec un voisinage de a lorsque a est un point de E adhérent à A , avec le complémentaire d'une boule de centre 0 lorsque a est à l'infini, avec un intervalle $]c, +\infty[$ lorsque $E = \mathbf{R}$ et $a = +\infty$, avec un intervalle $]-\infty, c[$ lorsque $E = \mathbf{R}$ et $a = -\infty$.

a) Normes et distances

Définition d'une norme, notée $x \mapsto \|x\|$ ou $x \mapsto N(x)$, sur un espace vectoriel E réel ou complexe; distance associée, notée $(x, y) \mapsto d(x, y)$. Boules. Distance d'un point x de E à une partie A de E , notée $d(x, A)$.

Vecteurs unitaires; vecteur unitaire associé à un vecteur non nul.

Norme $x \mapsto \|x\| = (x|x)^{1/2}$ associée à un produit scalaire $(x, y) \mapsto (x|y)$ sur un espace vectoriel réel ou complexe.

Définition d'une partie bornée, d'une application bornée.

Définition d'une application k -lipschitzienne, composée d'applications lipschitziennes.

Définition de la norme induite sur un sous-espace vectoriel de E ; définition de la distance induite sur une partie de E .

Définition du produit d'une famille finie d'espaces normés, muni de la norme $N(x) = \sup_i N_i(x_i)$.

Les étudiants doivent connaître les normes N_1 , N_2 et N_∞ sur $\mathbf{K}^n$ et sur l'espace vectoriel $\mathcal{C}([a, b])$ des fonctions continues sur $[a, b]$ à valeurs réelles ou complexes, ainsi que les normes N_1 , N_2 et N_∞ définies respectivement sur les espaces ℓ^1 , ℓ^2 et ℓ^∞ .

Relation

$$\|x\| = \sup_{\|y\| \leq 1} |(x|y)|.$$

Espace vectoriel normé $\mathcal{B}(A, F)$ des applications bornées f de A dans F muni de la norme $N_\infty(f) = \sup_x \|f(x)\|$.

Les applications $x \mapsto \|x\|$ et $x \mapsto d(x, A)$ sont 1-lipschitziennes.

Les applications coordonnées sont 1-lipschitziennes.

b) Suites d'éléments d'un espace vectoriel normé

Suites convergentes, suites divergentes d'éléments d'un espace vectoriel normé E .

Comparaison de deux normes N et N' sur E : pour que toute suite convergeant vers 0 au sens de N converge vers 0 au sens de N' , il faut et il suffit qu'il existe un nombre réel $\alpha > 0$ tel que $N' \leq \alpha N$. Normes équivalentes.

Espace vectoriel normé $\ell^\infty(E)$ des suites bornées d'éléments de E , muni de la norme $N_\infty(u) = \sup \|u_n\|$. Sous-espace vectoriel des suites convergentes.

Suites extraites d'une suite, définition d'une valeur d'adhérence. Valeurs d'adhérence d'une suite convergente. Toute suite ayant au moins deux valeurs d'adhérence est divergente.

Relations de comparaison entre suites: domination et négligeabilité pour une suite (u_n) à valeurs vectorielles et une suite (α_n) à valeurs réelles. Équivalence pour deux suites (u_n) et (v_n) à valeurs vectorielles.

Opérations algébriques sur les suites convergentes.

Les étudiants doivent savoir comparer notamment les normes usuelles mentionnées au paragraphe a).

Convergence des suites d'un sous-espace vectoriel normé, d'un espace vectoriel normé produit.

Aucune autre connaissance spécifique sur les valeurs d'adhérence n'est exigible des étudiants. Les notions de limites supérieure et inférieure sont hors programme.

Notations $u_n = O(\alpha_n)$, $u_n = o(\alpha_n)$, $u_n \sim v_n$.

c) Topologie d'un espace vectoriel normé

Définition des voisinages d'un point, des parties ouvertes, des parties fermées.

Définition d'un point adhérent à une partie A , de l'adhérence $\bar{A}$ de A ; parties denses. Caractérisation de $\bar{A}$ comme plus petite partie fermée contenant A . En particulier, A est fermée si et seulement si $\bar{A} = A$.

Définition d'un point intérieur à une partie A , de l'intérieur de A , d'un point frontière de A , de la frontière de A .

Caractérisation séquentielle des points adhérents, des parties fermées.

Définition des voisinages d'un point, des ouverts et des fermés relatifs à une partie A .

d) Étude locale d'une application, continuité

Limite d'une application : soit f une application d'une partie A de E à valeurs dans F et a un point de E adhérent à A . Étant donné un élément b de F , on dit que f admet b comme limite au point a si, pour tout nombre réel $\varepsilon > 0$, il existe un nombre réel $\delta > 0$ tel que, pour tout élément x de A , la relation $\|x - a\| \leq \delta$ implique la relation $\|f(x) - b\| \leq \varepsilon$; le vecteur b est alors unique, et on le note $b = \lim_{x \rightarrow a} f$ ou $b = \lim_{x \rightarrow a} f(x)$. Lorsqu'un tel élément b existe, on dit que f admet une limite au point a . Interprétation en termes de voisinages.

Dans le cas des fonctions d'une variable réelle, extension de cette définition lorsque $a = +\infty$ ou $a = -\infty$.

Dans le cas des fonctions à valeurs réelles, extension lorsque $b = +\infty$ ou $b = -\infty$.

Limite d'une application composée. Opérations algébriques sur les limites.

Limite de l'image d'une suite (u_n) admettant une limite a par une application f admettant une limite au point a .

Relations de comparaison en un point : domination et négligeabilité pour une fonction f à valeurs vectorielles et une fonction φ à valeurs réelles. Équivalence pour deux fonctions f et g à valeurs vectorielles.

Applications continues. Continuité de la composée de deux applications continues, de la restriction d'une application continue, d'une fonction à valeurs dans un espace vectoriel normé produit. Opérations algébriques sur les applications continues.

Deux applications continues f et g de A dans F coïncidant sur une partie B de A dense dans A sont égales.

Image réciproque d'une partie ouverte, d'une partie fermée par une application continue.

Réunion et intersection de parties ouvertes, de parties fermées.

Aucune autre connaissance spécifique sur ces notions n'est exigible des étudiants et tout excès de technicité est exclu.

La notion de point d'accumulation est hors programme.

Lorsque a appartient à A , f est dite continue au point a ; alors $b = f(a)$. Dans le cas contraire, f admet une limite en a si et seulement si f se prolonge par continuité en ce point.

Étant donnée une partie P de A et un point a de E adhérent à P , on dit que f admet une limite au point a selon P si la restriction de f à P admet une limite en a .

Extension au cas d'une variable vectorielle dont la norme tend vers l'infini.

Limite d'une fonction à valeurs dans un espace vectoriel normé produit.

Caractérisation séquentielle de l'existence d'une limite, de la continuité en un point.

Notations $f = O(\varphi)$, $f = o(\varphi)$, $f \sim g$.

Espace vectoriel $\mathcal{C}(A, F)$ des applications continues de A dans F , algèbre $\mathcal{C}(A)$ des fonctions à valeurs réelles ou complexes continues sur A .

Les étudiants doivent savoir exploiter des raisonnements par densité pour établir des relations entre fonctions continues.

Il convient de souligner l'intérêt de ces résultats pour démontrer qu'une partie est ouverte (ou fermée).

e) Applications linéaires continues

Caractérisation des applications linéaires continues d'un espace normé (E, N) dans un espace normé (F, N') .

Caractérisation de l'équivalence de normes par la bicontinuité de l'application identique, par la conservation des parties ouvertes.

Norme subordonnée à N et N' d'une application linéaire continue u de E dans F :

$$\|u\| = \sup_{N(x) \leq 1} N'(u(x)).$$

Si u et v sont des applications linéaires continues, $v \circ u$ l'est aussi, et

$$\|v \circ u\| \leq \|v\| \|u\|.$$

Définition d'une algèbre normée unitaire. Algèbre normée $\mathcal{B}(A, \mathbf{C})$ des applications bornées de A dans $\mathbf{C}$.

Continuité d'une application bilinéaire B de $E \times F$ dans G satisfaisant à la relation

$$\|B(x, y)\| \leq k \|x\| \|y\|.$$

Continuité de l'application $(\lambda, x) \mapsto \lambda x$ de $\mathbf{K} \times E$ dans E , du produit scalaire sur un espace préhilbertien, de l'application $(u, v) \mapsto uv$ dans une algèbre normée.

Pour qu'une application linéaire u de E dans F soit continue, il faut et il suffit qu'il existe un nombre réel $k > 0$ tel que, pour tout x , $N'(u(x)) \leq k N(x)$; dans ces conditions, u est k -lipschitzienne.

Espace vectoriel normé $\mathcal{LC}(E, F)$ des applications linéaires continues de E dans F .

Algèbre normée $\mathcal{LC}(E)$ des endomorphismes continus d'un espace vectoriel normé E .

La notion de norme d'une application bilinéaire est hors programme.

Continuité de $(u, v) \mapsto uv$ dans l'algèbre normée $\mathcal{LC}(E)$.

f) Complétude, compacité

L'étude de la compacité en dimension quelconque n'est pas un objectif du programme ; pour la pratique, il convient de se limiter aux espaces vectoriels de dimension finie.

Définition d'une suite de Cauchy d'éléments d'un espace normé. Définition d'un espace de Banach, d'un espace de Hilbert.

Parties complètes d'un espace vectoriel normé.

Critère de Cauchy d'existence d'une limite en un point pour une application à valeurs dans un tel espace.

Définition (séquentielle) d'une partie compacte A d'un espace vectoriel normé E .

Une telle partie est fermée bornée. Toute partie fermée d'une partie compacte est compacte.

Si A est une partie compacte de E et B une partie compacte de F , alors $A \times B$ est une partie compacte de $E \times F$.

Théorème de Bolzano-Weierstrass : de toute suite bornée d'éléments de $\mathbf{R}$, de $\mathbf{C}$, de $\mathbf{R}^n$, de $\mathbf{C}^n$ on peut extraire une suite convergente.

Étant donnée une application continue f de A dans F , l'image par f d'une partie compacte de E incluse dans A est une partie compacte de F . Cas d'une fonction numérique continue sur un compact : existence d'extrémums.

Définition des applications uniformément continues. Continuité uniforme d'une application continue sur un compact.

Les corps $\mathbf{R}$ et $\mathbf{C}$ (munis de la valeur absolue) sont complets ; les espaces produits $\mathbf{R}^n$ et $\mathbf{C}^n$ le sont aussi.

Les parties complètes d'un espace de Banach sont les parties fermées.

Dans ces espaces, les parties compactes sont les parties fermées bornées.

Toute application continue sur un compact est bornée, et la borne supérieure de sa norme est atteinte.

La continuité uniforme constitue un outil important en analyse ; en revanche, l'étude de ce concept n'est pas un objectif en soi.

2- Espaces vectoriels normés de dimension finie

L'objectif de ce chapitre est d'établir l'équivalence des normes sur un espace vectoriel normé de dimension finie, et d'en déduire les propriétés de complétude et de compacité de tels espaces.

L'équivalence des normes montre que de nombreux concepts importants sont indépendants du choix d'une norme : parties bornées, applications bornées, applications lipschitziennes ; parties ouvertes, parties fermées, adhérence, intérieur, limite et continuité d'une application, continuité uniforme ; suites convergentes, parties compactes ; suites de Cauchy, parties complètes. Par conséquent, pour toutes ces notions, il est légitime de se placer dans le cadre des espaces vectoriels de dimension finie (sans préciser une norme particulière).

a) Topologie d'un espace vectoriel de dimension finie

Équivalence des normes sur un espace vectoriel E de dimension finie ; parties bornées et topologie d'un tel espace.

Continuité des applications linéaires et multilinéaires définies sur de tels espaces. Caractérisation des applications continues à valeurs dans un espace vectoriel F de dimension finie à l'aide d'une base de F .

Tout espace vectoriel normé E de dimension finie est un espace de Banach.

Théorème de Bolzano-Weierstrass : dans un espace vectoriel normé E de dimension finie, les parties compactes sont les parties fermées bornées.

Expression de la norme d'un endomorphisme u d'un espace euclidien en fonction du produit scalaire :

$$\|u\| = \sup_{(x,y)} |(u(x)|y)|, \quad \text{où } \|x\| \leq 1, \|y\| \leq 1.$$

Relations $\|u^*\| = \|u\|$ et $\|u\|^2 = \|u^*u\|$.

Pour qu'une suite d'éléments de E converge, il faut et il suffit que ses coordonnées dans une base de E convergent ; les coordonnées de la limite sont alors les limites des coordonnées.

Les parties complètes de E sont les parties fermées.

La partie constituée des éléments d'une suite convergente et de sa limite est compacte.

En outre, lorsque u est autoadjoint positif,

$$\|u\| = \sup_{\|x\| \leq 1} (u(x)|x) = r(u),$$

où $r(u)$ est la plus grande valeur propre de u .

b) Connexité par arcs

Définition d'une partie connexe par arcs d'un espace normé E de dimension finie. Les parties connexes par arcs de $\mathbf{R}$ sont les intervalles ; toute partie convexe de E est connexe par arcs. Image continue d'une partie connexe par arcs.

Cas des fonctions à valeurs réelles continues sur une partie connexe par arcs : théorème des valeurs intermédiaires.

L'étude générale de la connexité est hors programme.

3- Séries d'éléments d'un espace vectoriel normé

L'objectif de ce chapitre est triple :

- Étudier la convergence des séries de nombres réels positifs.
- Étudier la convergence des séries absolument convergentes à partir des résultats obtenus pour les séries de nombres réels positifs.
- Introduire le concept de suite sommable de nombres réels ou complexes.

Dans ce chapitre, le programme se place dans le cadre des séries d'éléments d'un espace vectoriel normé E de dimension finie.

a) Suites et séries

Série $\sum u_n$ associée à une suite (u_n) d'éléments d'un espace vectoriel normé E de dimension finie, suite (s_p) des sommes partielles de cette série.

Définition d'une série convergente et de sa somme, notée $\sum_{n=0}^{+\infty} u_n$. Espace vectoriel des séries convergentes.

Il convient de mettre en valeur et d'exploiter la correspondance bijective entre suites et séries.

Si la série $\sum u_n$ converge, u_n tend vers 0 ; la réciproque est fausse.

Caractérisation de la convergence à l'aide d'une base de E .

Convergence d'une série alternée dont la valeur absolue du terme général décroît et tend vers zéro ; majoration du reste.

b) Séries de nombres réels positifs

Pour qu'une série $\sum u_n$ de nombres réels positifs converge, il faut et il suffit que la suite (s_p) des sommes partielles soit majorée. Alors $\sum_{n=0}^{+\infty} u_n = \lim_p s_p = \sup_p s_p$.

Théorème de comparaison des séries de nombres réels positifs : soient (u_n) et (α_n) des suites de nombres réels positifs telles que $u_n = O(\alpha_n)$; alors la convergence de $\sum \alpha_n$ implique la convergence de $\sum u_n$.

Comparaison logarithmique : si, pour tout entier n , $u_n > 0$ et $\alpha_n > 0$, et si, à partir d'un certain rang,

$$\frac{u_{n+1}}{u_n} \leq \frac{\alpha_{n+1}}{\alpha_n},$$

alors $u_n = O(\alpha_n)$.

c) Séries d'éléments d'un espace vectoriel normé de dimension finie

Critère de Cauchy pour la convergence d'une série d'éléments d'un espace vectoriel normé E de dimension finie.

Séries absolument convergentes d'éléments de E (c'est-à-dire telles que $\sum \|u_n\| < +\infty$). Toute série absolument convergente est convergente.

Série géométrique : étant donné une algèbre normée $\mathcal{A}$ de dimension finie ayant e pour élément unité et u un élément de $\mathcal{A}$ tel que $\|u\| < 1$, la série $\sum u^n$ est absolument convergente, $e - u$ est inversible dans $\mathcal{A}$ et $(e - u)^{-1} = \sum_{n=0}^{+\infty} u^n$.

Série exponentielle : étant donné une algèbre normée $\mathcal{A}$ de dimension finie ayant e pour élément unité alors, pour tout élément u de $\mathcal{A}$, la série $\sum \frac{u^n}{n!}$ est absolument convergente ; par définition,

$$\exp u = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{u^n}{n!}.$$

d) Suites sommables de nombres réels ou complexes

Une suite $u = (u_n)$ de nombres réels positifs est dite sommable s'il existe un nombre réel positif M tel que, pour toute partie finie J de $\mathbf{N}$, la somme partielle $s_J(u) = \sum_{n \in J} u_n$

soit majorée par M . Définition de la somme de la famille u par la relation

$$s(u) = \sum_{n \in \mathbf{N}} u_n = \sup_J s_J(u).$$

Aucune autre connaissance spécifique sur les séries semi-convergentes n'est exigible des étudiants.

Convergence des séries géométriques de nombres réels positifs, convergence des séries de Riemann.

Comparaison d'une série de nombres réels positifs à une série géométrique, à une série de Riemann.

Développement décimal d'un nombre réel positif.

Comparaison logarithmique à une série géométrique : règle de d'Alembert.

En outre,
$$\left\| \sum_{n=0}^{+\infty} u_n \right\| \leq \sum_{n=0}^{+\infty} \|u_n\|.$$

La série géométrique $\sum z^n$, où z appartient à $\mathbf{C}$, est absolument convergente si et seulement si $|z| < 1$; sa somme est alors égale à $\frac{1}{1-z}$. En outre, si $|z| \geq 1$, cette série diverge.

Exponentielle d'un nombre complexe, d'un endomorphisme d'espace vectoriel normé E de dimension finie, d'une matrice réelle ou complexe.

S'il existe une suite croissante (J_n) de parties finies de $\mathbf{N}$ dont la réunion est égale à $\mathbf{N}$ et telle que, pour tout n , $s_{J_n}(u) \leq M$, alors u est sommable.

Dans ces conditions, pour toute suite (J_n) du type précédent,

$$s(u) = \sup_n s_{J_n}(u) = \lim_n s_{J_n}(u).$$

Pour qu'une suite (u_n) de nombres réels positifs soit sommable, il faut et il suffit que la série $\sum u_n$ converge ;

dans ces conditions, $\sum_{n \in \mathbf{N}} u_n = \sum_{n=0}^{+\infty} u_n$.

Une suite $u = (u_n)$ de nombres réels ou complexes est dite sommable si la suite $(|u_n|)$ l'est. Définition de la somme $s(u) = \sum u_n$: pour toute suite croissante (J_n) de parties finies de $\mathbf{N}$ dont la réunion est égale à $\mathbf{N}$,

$$s(u) = \sum_{n \in \mathbf{N}} u_n = \lim_n s_{J_n}(u).$$

Définition de l'espace vectoriel ℓ^1 des suites sommables, muni de la norme $u \mapsto N_1(u) = \sum_{n \in \mathbf{N}} |u_n|$.

Pour que u soit sommable, il faut et il suffit que la série $\sum u_n$ converge absolument ; dans ces conditions,

$$\sum_{n \in \mathbf{N}} u_n = \sum_{n=0}^{+\infty} u_n.$$

Définition de l'espace vectoriel ℓ^2 des suites de carré sommable, muni du produit scalaire $(u, v) \mapsto (u|v) = \sum_{n \in \mathbf{N}} \bar{u}_n v_n$ et de la norme N_2 associée.

4- Suites et séries de fonctions

L'objectif de ce chapitre est de définir les modes usuels de convergence ponctuelle des suites et séries de fonctions (convergence simple, convergence uniforme, convergence uniforme sur tout compact, convergence normale d'une série) et d'exploiter ces types de convergence pour étudier la stabilité des propriétés des fonctions par passage à la limite et l'approximation d'une fonction par des fonctions plus simples.

Il convient de souligner que, le plus souvent, la convergence simple ne suffit pas pour assurer la régularité de la limite d'une suite de fonctions. En revanche, l'étude systématique des différents modes de convergence des suites et des séries d'applications n'est pas un objectif du programme.

Dans ce chapitre, les fonctions considérées sont définies sur une partie A d'un espace vectoriel E de dimension finie et, sauf mention explicite du contraire, à valeurs réelles ou complexes.

a) Convergence simple, convergence uniforme, convergence normale

Étant donnée une suite (f_n) de fonctions définies sur une partie A de E à valeurs réelles ou complexes, définition de la convergence simple sur A , de la convergence uniforme sur A , de la convergence uniforme sur tout compact de E contenu dans A .

Si (f_n) converge vers f uniformément sur A et si, pour tout n , f_n est bornée sur A , alors f l'est aussi.

Soit a un point de A ; si (f_n) converge vers f uniformément sur A et si, pour tout n , f_n est continue au point a , alors f l'est aussi.

Si (f_n) converge vers f uniformément sur tout compact inclus dans A et si, pour tout n , f_n est continue sur A , f l'est aussi. Continuité de la somme d'une série de fonctions continues uniformément convergente sur tout compact.

Une série $\sum f_n$ de fonctions définies sur A est dite normalement convergente sur A si la série numérique $\sum \|f_n\|_\infty$ est convergente. Convergence normale sur tout compact.

Toute série $\sum f_n$ normalement convergente sur A est absolument et uniformément convergente sur A .

Extension des notions et résultats précédents au cas des suites et séries d'applications d'une partie A de E à valeurs dans un espace vectoriel normé F de dimension finie.

Définitions correspondantes pour une série de fonctions.

Pour les fonctions bornées, la convergence uniforme peut être interprétée à l'aide de la norme N_∞ sur l'espace $\mathcal{B}(A)$.

Extension de ce résultat au cas où a est adhérent à A (ou, lorsque $E = \mathbf{R}$, aux cas où $a = +\infty$ et $a = -\infty$) et où, pour tout n , f_n admet une limite b_n en a .

Lorsque A est une partie compacte de E , l'espace vectoriel $\mathcal{C}(A)$ des applications continues sur A est un sous-espace vectoriel fermé de $\mathcal{B}(A)$ muni de la norme N_∞ .

Pour établir la convergence normale de $\sum f_n$, il convient d'utiliser une série numérique convergente $\sum \alpha_n$ majorante, c'est-à-dire telle que, pour tout n , $\|f_n\|_\infty \leq \alpha_n$.

$$\text{Alors, } N_\infty \left(\sum_{n=0}^{+\infty} f_n \right) \leq \sum_{n=0}^{+\infty} N_\infty(f_n).$$

Dans une algèbre normée $\mathcal{A}$ de dimension finie, continuité de $u \mapsto (e - u)^{-1}$ sur la boule unité $\|u\| < 1$; continuité de $u \mapsto \exp u$ sur $\mathcal{A}$.

b) Approximation des fonctions d'une variable réelle

Dans ce paragraphe, les applications considérées sont définies sur un intervalle I de $\mathbf{R}$ et à valeurs dans un espace vectoriel F de dimension finie.

Définition d'une fonction φ à valeurs dans F en escalier sur $[a, b]$, d'une subdivision de $[a, b]$ subordonnée à φ . Espace vectoriel des fonctions en escalier sur un segment.

Définition d'une fonction à valeurs dans F continue par morceaux sur $[a, b]$. Espace vectoriel des fonctions continues par morceaux sur $[a, b]$.

Approximation uniforme sur $[a, b]$ des fonctions à valeurs dans F continues par morceaux sur $[a, b]$ par des fonctions en escalier sur $[a, b]$, des fonctions continues sur $[a, b]$ par des fonctions continues affines par morceaux sur $[a, b]$.

Approximation uniforme sur $[a, b]$ des fonctions à valeurs complexes continues sur $[a, b]$ par des fonctions polynomiales. Approximation uniforme sur $\mathbf{R}$ des fonctions à valeurs complexes continues périodiques par des polynômes trigonométriques (complexes).

Espace vectoriel des fonctions en escalier sur $\mathbf{R}$ (par définition, ces fonctions sont nulles en dehors d'un segment).

Une fonction est dite continue par morceaux sur un intervalle I quelconque si sa restriction à tout segment est continue par morceaux.

La démonstration des théorèmes de Weierstrass n'est pas exigible des étudiants.

Travaux pratiques

Exemples d'obtention de majorations et de minorations d'expressions réelles ou du module d'expressions complexes ; exemples d'emploi pour l'étude de suites et de fonctions.

§ Exemples d'étude du comportement global et asymptotique de suites de nombres réels, de nombres complexes. Exemples de méthodes d'accélération de convergence.

§ Exemples d'étude de suites de nombres réels ou complexes définies par une relation de récurrence $u_{n+1} = f(u_n)$ et d'emploi d'une telle suite pour l'approximation d'un point fixe a de f .

Exemples d'espaces vectoriels normés de suites et de fonctions ; exemples d'applications linéaires continues ou discontinues. Exemples de calcul et de comparaison de normes.

§ Exemples d'étude de séries numériques et de séries d'éléments d'un espace vectoriel normé de dimension finie.

§ Exemples d'obtention et d'emploi d'approximations uniformes de fonctions d'une variable réelle.

Exemples d'étude de problèmes d'extrémums.

Pour l'ensemble des travaux pratiques sur les suites, il convient d'exploiter l'étude de systèmes dynamiques discrets.

Il convient d'entraîner les étudiants à exploiter la comparaison aux suites de référence et à classer des ordres de grandeur.

Pour étudier la vitesse de convergence de u_n vers a , les étudiants doivent savoir exploiter le comportement local de f au voisinage de a et, notamment, une inégalité du type lipschitzien $|f(x) - f(a)| \leq k|x - a|$ où $0 \leq k < 1$, ou du type $|f(x) - f(a)| \leq \lambda|x - a|^2$.

Cas des espaces vectoriels normés d'applications linéaires ou de matrices, cas des algèbres normées de dimension finie.

Cas des séries d'endomorphismes ou de matrices.

II. FONCTIONS D'UNE VARIABLE RÉELLE : DÉRIVATION ET INTÉGRATION

Le programme est organisé autour de quatre objectifs :

- Consolider les acquis de première année concernant la dérivation et l'intégration des fonctions d'une variable réelle à valeurs réelles ou complexes.
- Étendre ces résultats au cas des fonctions d'une variable réelle à valeurs vectorielles.
- Étudier l'intégration et la dérivation des suites et séries de fonctions à valeurs vectorielles.
- Effectuer une étude élémentaire des fonctions définies par des intégrales dépendant d'un paramètre.

Aussi bien pour l'étude locale que pour l'étude globale des fonctions, le programme combine de manière indissociable les outils du calcul différentiel et du calcul intégral.

1- Dérivation des fonctions à valeurs vectorielles

L'objectif de ce chapitre est double :

- Consolider les acquis de première année concernant la dérivation des fonctions à valeurs réelles ou complexes : dérivation en un point, propriétés globales des fonctions de classe $\mathcal{C}^k$, fonctions convexes.
- Étudier la dérivation des fonctions à valeurs vectorielles.

Les fonctions étudiées dans ce chapitre sont définies sur un intervalle I de $\mathbf{R}$ et à valeurs dans un espace vectoriel F de dimension finie sur $\mathbf{R}$ ou sur $\mathbf{C}$.

a) Dérivée en un point, fonctions de classe $\mathcal{C}^1$

Définition de la dérivabilité d'une fonction f définie sur un intervalle I en un point a de I : dérivée, dérivée à gauche, à droite.

Définition de la dérivabilité d'une fonction f sur un intervalle I , application dérivée ; application de classe $\mathcal{C}^1$ sur un intervalle I .

Espace vectoriel $\mathcal{C}^1(I, F)$ des applications de classe $\mathcal{C}^1$ sur I , linéarité de la dérivation, dérivée d'une application de la forme $u(f)$ où u est une application linéaire, dérivée d'une application de la forme $B(f, g)$, où B est une application bilinéaire.

Caractérisation de la dérivabilité d'une fonction f à valeurs dans F à l'aide d'une base de F .

Cas d'une fonction f à valeurs complexes : pour que f soit de classe $\mathcal{C}^1$, il faut et il suffit que $\bar{f}$ le soit, ou encore que $\operatorname{Re} f$ et $\operatorname{Im} f$ le soient.

Caractérisation des fonctions constantes parmi les fonctions continues sur I et dérivables sur l'intérieur de I .

Les étudiants doivent connaître et savoir exploiter l'interprétation cinématique et graphique de la notion de dérivée en un point.

Notations f' , Df , $\frac{df}{dx}$.

Lorsque F est un espace préhilbertien, dérivation du produit scalaire $(f|g)$, du carré de la norme $\|f\|_2$; lorsque e est un vecteur unitaire, orthogonalité de e et de De .

Les coordonnées de Df sont les dérivées des coordonnées de f .

Dans ces conditions,

$$D(\bar{f}) = \overline{Df}, \quad Df = D(\operatorname{Re} f) + i D(\operatorname{Im} f).$$

b) Fonctions de classe $\mathcal{C}^k$

Définition des applications de classe $\mathcal{C}^k$ sur un intervalle I (k entier naturel ou $k = +\infty$).

Espace vectoriel $\mathcal{C}^k(I, F)$ des applications de classe $\mathcal{C}^k$ sur I à valeurs dans F , où $0 \leq k \leq +\infty$. Algèbre $\mathcal{C}^k(I)$ des fonctions de classe $\mathcal{C}^k$ sur I à valeurs réelles ou complexes.

La composée $f \circ \varphi$ d'une application f de classe $\mathcal{C}^k$ sur I et d'une fonction φ de classe $\mathcal{C}^k$ sur un intervalle J à valeurs dans I est de classe $\mathcal{C}^k$ sur J .

Définition d'un $\mathcal{C}^k$ -difféomorphisme de J sur I ($k \geq 1$).

Notations $f^{(k)}$, $D^k f$, $\frac{d^k f}{dx^k}$.

Dérivée k -ième du produit de deux fonctions (formule de Leibniz).

Une fonction φ de classe $\mathcal{C}^k$ sur un intervalle J ($k \geq 1$) est un $\mathcal{C}^k$ -difféomorphisme de J sur $I = \varphi(J)$ si et seulement si, pour tout élément t de J , $\varphi'(t) \neq 0$.

c) Fonctions de classe $\mathcal{C}^k$ par morceaux

Une application f à valeurs dans F est dite de classe $\mathcal{C}^k$ par morceaux sur un segment $[a, b]$, où $1 \leq k \leq +\infty$, s'il existe une subdivision $(a_0, a_1, \dots, a_n)$ de $[a, b]$ telle que la restriction de f à chacun des intervalles $]a_i, a_{i+1}[$ soit prolongeable en une fonction de classe $\mathcal{C}^k$ sur $[a_i, a_{i+1}]$.

Les dérivées successives de f sont définies sur $[a, b]$ privé d'une partie finie ; elles sont notées $D^j f$.

Si f est continue sur I et de classe $\mathcal{C}^1$ par morceaux sur I , f est constante si et seulement si $Df = 0$.

Une fonction f est dite de classe $\mathcal{C}^k$ par morceaux sur un intervalle I quelconque si sa restriction à tout segment est de classe $\mathcal{C}^k$ par morceaux.

Il convient de mettre en valeur le cas usuel des fonctions de classe $\mathcal{C}^k$ sur I et $\mathcal{C}^{k+1}$ par morceaux sur I .

2- Intégration sur un segment des fonctions à valeurs vectorielles

L'objectif de ce chapitre est triple :

- Consolider les acquis de première année concernant l'intégration des fonctions à valeurs réelles ou complexes.
- Étendre la notion d'intégrale aux fonctions à valeurs vectorielles continues par morceaux sur un segment.
- Étudier l'intégration sur un segment des suites et séries de fonctions continues ; introduire les convergences en moyenne et en moyenne quadratique et les comparer à la convergence uniforme.

Le programme se limite à l'intégration des fonctions continues par morceaux sur un segment $J = [a, b]$ à valeurs dans un espace vectoriel F de dimension finie sur $\mathbf{R}$ ou sur $\mathbf{C}$. La notion de fonction intégrable au sens de Riemann est hors programme.

a) Intégrale d'une fonction continue par morceaux

Définition de l'intégrale d'une application φ en escalier sur un segment J . Notations $\int_J \varphi$, $\int_{[a,b]} \varphi$. Linéarité de l'intégrale. Image de l'intégrale par une application linéaire.

Définition de l'intégrale d'une application f continue par morceaux sur un segment J . Notations $\int_J f$, $\int_{[a,b]} f$. Linéarité de l'intégrale. Invariance de l'intégrale par translation.

Pour les fonctions à valeurs réelles, positivité et croissance de l'intégrale.

Image de l'intégrale par une application linéaire. Expression de l'intégrale à l'aide d'une base de F .

Les intégrales de deux fonctions continues par morceaux coïncident sauf sur une partie finie de J sont égales.

Si K est un segment contenu dans J , $\int_K f = \int_J \chi_K f$ où χ_K est la fonction caractéristique de K .

Valeur moyenne d'une fonction. Inégalité de la moyenne

$$\left\| \int_{[a,b]} f \right\| \leq \int_{[a,b]} \|f\| \leq (b-a) \sup_{[a,b]} \|f\|.$$

$$\text{Inégalité} \quad \left\| \int_J \varphi \right\| \leq \int_J \|\varphi\|.$$

$$\text{Inégalité} \quad \left\| \int_J f \right\| \leq \int_J \|f\|.$$

Une fonction f continue et à valeurs positives sur un segment $[a, b]$ est nulle si et seulement si son intégrale est nulle.

Pour une fonction f à valeurs complexes, intégrale de $\bar{f}$, de $\operatorname{Re} f$, de $\operatorname{Im} f$.

Définition de l'intégrale d'une fonction f définie sur un segment $[a, b]$ privé d'une subdivision $S = (a_0, a_1, \dots, a_n)$ de $[a, b]$, lorsque la restriction de f à chacun des intervalles ouverts $]a_j, a_{j+1}[$ est prolongeable en une fonction continue sur $[a_j, a_{j+1}]$.

Additivité de l'intégrale par rapport à l'intervalle d'intégration.

Les étudiants doivent savoir effectuer des majorations analogues pour des intégrales de la forme $\int_{[a,b]} B(f, g)$, où B est une application bilinéaire. En revanche, toute formule ou égalité dite de la moyenne est hors programme.

Approximation de l'intégrale d'une application f continue sur $[a, b]$ par une somme de Riemann : pour tout nombre réel $\varepsilon > 0$, il existe un nombre réel $\delta > 0$ tel que, pour toute subdivision S de $[a, b]$ de pas inférieur ou égal à δ et toute somme de Riemann $R_S(f)$ associée à S ,

$$\left\| \int_{[a,b]} f - R_S(f) \right\| \leq \varepsilon.$$

Étant donnée une application f continue par morceaux sur un intervalle I de $\mathbf{R}$, définition de $\int_a^b f(t) dt$, où a et b appartiennent à I .

Cas où f est k -lipschitzienne sur $[a, b]$.

Linéarité. Inégalité de la moyenne. Relation de Chasles.

b) Intégration sur un segment des suites de fonctions continues

Norme de la convergence en moyenne $f \mapsto N_1(f) = \int_{[a,b]} \|f\|$ sur l'espace vectoriel $\mathcal{C}([a, b], F)$ des applications continues de $[a, b]$ dans F . La convergence uniforme de (f_n) sur $[a, b]$ implique la convergence en moyenne et, en outre,

$$\int_{[a,b]} \lim_n f_n = \lim_n \int_{[a,b]} f_n.$$

Intégration terme à terme d'une série d'applications continues : soit (f_n) une suite d'applications continues sur $[a, b]$. Si la série $\sum f_n$ converge uniformément sur $[a, b]$, la série des intégrales est convergente et

$$\int_{[a,b]} \sum_{n=0}^{+\infty} f_n = \sum_{n=0}^{+\infty} \int_{[a,b]} f_n.$$

Produit scalaire $(f, g) \mapsto \int_{[a,b]} \bar{f}g$ sur l'espace vectoriel $\mathcal{C}([a, b])$ des fonctions continues sur $[a, b]$ à valeurs complexes ; inégalité de Cauchy-Schwarz. Norme de la convergence en moyenne quadratique $f \mapsto N_2(f) = (\int_{[a,b]} |f|^2)^{1/2}$. La convergence uniforme de (f_n) sur $[a, b]$ implique la convergence en moyenne quadratique, qui implique elle-même la convergence en moyenne.

Inégalités

$$\left\| \int_{[a,b]} f \right\| \leq N_1(f) \leq (b-a) N_\infty(f).$$

Lorsque la convergence est normale sur $[a, b]$, la série $\sum N_1(f_n)$ est convergente et

$$N_1\left(\sum_{n=0}^{+\infty} f_n\right) \leq \sum_{n=0}^{+\infty} N_1(f_n).$$

Inégalités

$$N_2(f) \leq \sqrt{b-a} N_\infty(f),$$

$$N_1(f) \leq \sqrt{b-a} N_2(f).$$

3- Dérivation et intégration

L'objectif de ce chapitre est triple :

- Étendre aux fonctions à valeurs vectorielles le théorème fondamental du calcul différentiel et intégral, et exploiter ce théorème pour l'étude globale des fonctions de classe $\mathcal{C}^1$ (théorème des accroissements finis) et pour les fonctions de classe $\mathcal{C}^k$ (formules de Taylor, théorème de relèvement).
- Étudier la primitivation des suites et séries de fonctions et appliquer les résultats obtenus à leur dérivation.
- Effectuer une étude élémentaire des fonctions définies par des intégrales dépendant d'un paramètre.

Les fonctions étudiées dans ce chapitre sont définies sur un intervalle I de $\mathbf{R}$ et à valeurs dans un espace vectoriel F de dimension finie sur $\mathbf{R}$ ou sur $\mathbf{C}$.

a) Primitives et intégrale d'une fonction continue

Définition d'une primitive g d'une application f continue sur un intervalle I .

Deux primitives d'une même application diffèrent d'une constante.

Théorème fondamental : étant donné une application f continue sur I et un point a de I ,

Extension de cette définition au cas où f est continue par morceaux sur I : g est continue sur I et de classe $\mathcal{C}^1$ par morceaux sur I et, en tout point de continuité de f , $g'(x) = f(x)$.

- L'application $x \mapsto \int_a^x f(t) dt$ est l'unique primitive de f qui s'annule en a ; pour toute primitive h de f sur I ,

$$\int_a^x f(t) dt = h(x) - h(a).$$

- Pour toute application f de classe $\mathcal{C}^1$ sur I ,

$$f(x) - f(a) = \int_a^x f'(t) dt.$$

Formule d'intégration par parties pour des fonctions de classe $\mathcal{C}^1$ sur I .

Changement de variable : étant données une fonction f continue sur I à valeurs dans F et une fonction φ à valeurs dans I et de classe $\mathcal{C}^1$ sur $[\alpha, \beta]$,

$$\int_{\varphi(\alpha)}^{\varphi(\beta)} f(t) dt = \int_{\alpha}^{\beta} f(\varphi(u)) \varphi'(u) du.$$

Extension au cas où f est continue par morceaux sur I , lorsque φ est strictement monotone sur $[\alpha, \beta]$.

b) Étude globale des fonctions de classe $\mathcal{C}^1$

Inégalité des accroissements finis : soit f une application continue sur $[a, b]$ et de classe $\mathcal{C}^1$ sur $]a, b[$. Si, pour tout élément t de $]a, b[$, $\|f'(t)\| \leq \lambda$, alors

$$\|f(b) - f(a)\| \leq \lambda(b - a).$$

Si f est continue sur $[a, b]$, de classe $\mathcal{C}^1$ sur $]a, b[$ et si f' a une limite finie en a , alors f est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $[a, b]$.

c) Formules de Taylor

Pour une application f de classe $\mathcal{C}^k$ sur I et de classe $\mathcal{C}^{k+1}$ par morceaux sur I , formule de Taylor à l'ordre k en un point a de I : expression intégrale du reste R_k . Majoration du reste R_k (inégalité de Taylor-Lagrange).

Développement limité d'une primitive d'une application continue ; application au développement limité de la dérivée d'une application de classe $\mathcal{C}^1$.

d) Théorème de relèvement

L'application $\theta \mapsto e^{i\theta}$ définit une bijection continue de $] - \pi, \pi[$ sur $\mathbf{U}$ privé de -1 , dont l'application réciproque $u \mapsto \text{Arg } u$ est continue ; relation

$$\text{Arg } u = 2 \text{Arctg } \frac{y}{1+x} \text{ où } u = x+iy, x^2 + y^2 = 1, x \neq -1.$$

Théorème de relèvement d'une application de classe $\mathcal{C}^k$ à valeurs dans $\mathbf{U}$, où $k \geq 1$.

Extension au cas où f est continue par morceaux sur I .

Extension au cas où f est continue sur I et de classe $\mathcal{C}^1$ par morceaux sur I .

Extension aux fonctions continues sur I et de classe $\mathcal{C}^1$ par morceaux sur I .

Il convient de mettre en valeur l'intérêt de changements de variable affines, notamment pour exploiter la périodicité et les symétries, ou pour se ramener, par paramétrage du segment $[a, b]$, au cas où l'intervalle d'intégration est $[0, 1]$ ou $[-1, 1]$.

Les étudiants doivent connaître l'interprétation cinématique de ce résultat.

Extension au cas où f est continue sur I et de classe $\mathcal{C}^1$ par morceaux sur $[a, b]$.

Extension aux applications de classe $\mathcal{C}^k$: si f est continue sur $[a, b]$, de classe $\mathcal{C}^k$ sur $]a, b[$ et si, pour tout $r \in [1, k]$, $D^r f$ admet une limite finie en a , alors f est de classe $\mathcal{C}^k$ sur $[a, b]$.

Décomposition $f(x) = T_k(x) + R_k(x)$, où

$$T_k(x) = \sum_{n=0}^k \frac{(x-a)^n}{n!} D^n f(a).$$

Existence d'un développement limité à l'ordre k pour une application de classe $\mathcal{C}^k$: formule de Taylor-Young.

Lorsque u tend vers -1 en restant tel que $\text{Im } u > 0$ (resp. $\text{Im } u < 0$), $\text{Arg } u$ admet pour limite π (resp. $-\pi$). En particulier, l'application $u \mapsto \text{Arg } u$ ne se prolonge pas en une application continue sur $\mathbf{U}$.

Le cas des fonctions continues est hors programme.

e) Suites et séries de fonctions de classe $\mathcal{C}^k$

Primitivation de la limite d'une suite de fonctions : soit a un point de I , (f_n) une suite d'applications continues sur un intervalle I à valeurs dans F et, pour tout n , h_n la primitive de f_n sur I telle que $h_n(a) = 0$. Si (f_n) converge uniformément sur tout segment de I vers f , alors (h_n) converge uniformément sur tout segment de I vers la primitive h de f telle que $h(a) = 0$.

Application aux séries de fonctions continues.

Dérivation de la limite d'une suite de fonctions : soit (f_n) une suite d'applications de classe $\mathcal{C}^1$ sur I convergeant simplement sur I vers f et telle que (f'_n) converge uniformément sur tout compact de I vers h . Alors f est de classe $\mathcal{C}^1$ sur I et $f' = h$. Extension aux applications de classe $\mathcal{C}^k$.

Dérivation terme à terme d'une série de fonctions : soit (f_n) une suite d'applications de classe $\mathcal{C}^1$ sur I à valeurs dans F . Si la série $\sum f_n$ converge simplement sur I et si la série $\sum f'_n$ converge uniformément sur tout compact de I , alors la somme de la série $\sum f_n$ est de classe $\mathcal{C}^1$ sur I et

$$D \left(\sum_{n=0}^{+\infty} f_n \right) = \sum_{n=0}^{+\infty} D f_n.$$

Étant donné un élément a d'une algèbre normée $\mathcal{A}$ de dimension finie, l'application $e_a : t \mapsto \exp ta$ est de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur $\mathbf{R}$ et $De_a = a e_a = e_a a$.

f) Intégrales dépendant d'un paramètre

Continuité sous le signe $\int$: soit f une application continue sur $A \times [a, b]$, où A est une partie de $\mathbf{R}^m$. Alors l'application g définie sur A par la relation $g(x) = \int_a^b f(x, t) dt$ est continue sur A .

Dérivation sous le signe $\int$ (formule de Leibniz) : lorsque A est un intervalle de $\mathbf{R}$ et que f est continue sur $A \times [a, b]$ et admet une dérivée partielle $\frac{\partial f}{\partial x}$ continue sur $A \times [a, b]$, alors g est de classe $\mathcal{C}^1$ sur A , et

$$g'(x) = \int_a^b \frac{\partial f}{\partial x}(x, t) dt.$$

Intégration sous le signe $\int$ (formule de Fubini) : lorsque A est un intervalle de $\mathbf{R}$ et que f est continue sur $A \times [a, b]$, alors pour tout segment $[c, d]$ inclus dans A

$$\int_c^d \left[\int_a^b f(x, t) dt \right] dx = \int_a^b \left[\int_c^d f(x, t) dx \right] dt.$$

Il convient de mettre en valeur le fait que, pour tout segment $[a, b]$ de I , pour toute application f continue par morceaux sur I et toute primitive h de f ,

$$N_\infty(h) \leq \|h(a)\| + \int_{[a,b]} \|f\|.$$

Il convient de mettre en valeur le fait que, pour tout segment $[a, b]$ de I et pour toute application f de classe $\mathcal{C}^1$ sur I ,

$$N_\infty(f) \leq \|f(a)\| + \int_{[a,b]} \|f'\|.$$

Extension aux fonctions de classe $\mathcal{C}^k$.

Application à l'exponentielle d'un nombre complexe, d'un endomorphisme, d'une matrice.

Extension au cas où f est continue sur $A \times I$: l'application $(u, v, x) \mapsto \int_u^v f(x, t) dt$ est continue sur $I \times I \times A$.

Extension aux fonctions de classe $\mathcal{C}^k$.

La formule de Fubini est à relier à la notion d'intégrale double.

4- Intégration sur un intervalle quelconque

Ce chapitre est organisé autour de quatre objectifs :

- Étudier l'intégrabilité d'une fonction continue par morceaux sur un intervalle, d'abord dans le cas des fonctions à valeurs positives, puis dans le cas des fonctions à valeurs réelles ou complexes.
- Étudier les suites et séries de fonctions intégrables, grâce aux théorèmes de convergence monotone et de convergence dominée, qui constituent des outils puissants.
- Appliquer les résultats obtenus à l'étude des fonctions définies par une intégrale dépendant d'un paramètre.
- Exploiter la représentation des fonctions par des séries et des intégrales, en relation avec l'enseignement des autres disciplines scientifiques.

Le programme se limite à l'intégration des fonctions continues par morceaux sur un intervalle I de $\mathbf{R}$ à valeurs réelles ou complexes. La notion de fonction intégrable au sens de Lebesgue est hors programme.

a) Fonctions intégrables à valeurs positives

Une fonction f à valeurs réelles positives continue par morceaux sur un intervalle I est dite intégrable (ou sommable) sur I s'il existe un nombre réel positif M tel que, pour tout segment J contenu dans I , $\int_J f \leq M$. On pose alors

$$\int_I f = \sup_J \int_J f.$$

Si f est continue par morceaux sur $[a, b]$, f est intégrable sur $[a, b]$, et son intégrale définie dans ce paragraphe coïncide avec l'intégrale définie au chapitre 2.

Opérations sur les fonctions continues par morceaux intégrables positives : somme, produit par un scalaire positif. Croissance : si f et g sont continues par morceaux sur I , si $0 \leq f \leq g$ et si g est intégrable, f l'est aussi et $\int_I f \leq \int_I g$.

Si a appartient à I , f est intégrable sur I si et seulement si elle est intégrable sur $I \cap]-\infty, a]$ et sur $I \cap [a, +\infty[$.

Caractérisation de l'intégrabilité de f sur $[a, b[$ à l'aide de la fonction $x \mapsto \int_a^x f(t) dt$.

b) Fonctions intégrables à valeurs complexes

Une fonction f à valeurs réelles ou complexes continue par morceaux sur un intervalle I est dite intégrable (ou sommable) sur I si $|f|$ est intégrable. Définition de l'intégrale $\int_I f$: pour toute suite croissante (J_n) de segments dont la réunion est égale à I

$$\int_I f = \lim_n \int_{J_n} f.$$

Si f et φ sont continues par morceaux, si $|f| \leq \varphi$ et si φ est intégrable sur I , alors f est intégrable sur I .

Espace vectoriel des fonctions continues par morceaux intégrables sur I . Linéarité de l'intégrale.

Une fonction f à valeurs réelles continue par morceaux est intégrable sur I si et seulement si f^+ et f^- le sont ; alors,

$$\int_I f = \int_I f^+ - \int_I f^-, \quad \int_I |f| = \int_I f^+ + \int_I f^-.$$

Si I' est un intervalle contenu dans I et si f est intégrable sur I , alors f est intégrable sur I' et $\int_{I'} f = \int_I \chi_{I'} f$.

Définition de $\int_a^b f(t) dt$, où a et b appartiennent à $\mathbf{R}$ et $a < b$, lorsque f est intégrable sur $]a, b[$. Cas où $b < a$. Relation de Chasles.

S'il existe une suite croissante (J_n) de segments dont la réunion est égale à I et telle que, pour tout n , $\int_{J_n} f \leq M$, alors f est intégrable sur I . Dans ces conditions, pour toute suite (J_n) du type précédent

$$\int_I f = \sup_n \int_{J_n} f = \lim_n \int_{J_n} f.$$

En outre, elle est intégrable sur $]a, b]$, $[a, b[$ et $]a, b[$, et les quatre intégrales sont égales.

Une fonction f continue, positive et intégrable sur I est nulle si et seulement si son intégrale est nulle.

Additivité de l'intégrale.

Cas des fonctions définies sur $]a, b]$. Intégrabilité de $t \mapsto t^\alpha$ sur $[a, +\infty[$, sur $]0, a]$.

Si f est continue par morceaux sur $[a, b]$, f est intégrable sur $[a, b]$, et son intégrale définie dans ce paragraphe coïncide avec l'intégrale définie au chapitre 2. En outre, elle est intégrable sur $]a, b]$, $[a, b[$ et $]a, b[$, et les quatre intégrales sont égales.

En particulier, si I est un intervalle borné et si f est bornée sur I , f est intégrable sur I .

Inégalité $|\int_I f| \leq \int_I |f|$.

Une fonction f à valeurs complexes continue par morceaux est intégrable sur I si et seulement si $\bar{f}$ l'est, ou si $\operatorname{Re} f$ et $\operatorname{Im} f$ le sont ; alors,

$$\int_I \bar{f} = \overline{\int_I f}, \quad \int_I f = \int_I \operatorname{Re} f + i \int_I \operatorname{Im} f.$$

Additivité de l'intégrale par rapport à l'intervalle d'intégration.

Emploi des relations de comparaison pour l'étude de l'intégrabilité. Étant données deux fonctions φ et ψ à valeurs réelles positives, intégration des relations de comparaison : domination $\psi = O(\varphi)$, négligeabilité $\psi = o(\varphi)$, équivalence $\psi \sim \varphi$ au voisinage de $+\infty$, au voisinage de a (cas des fonctions intégrables, cas des fonctions non intégrables).

Étant donnée une fonction f à valeurs réelles ou complexes continue par morceaux sur $[a, b]$, il peut arriver que f ne soit pas intégrable sur $[a, b]$, mais que la fonction $x \mapsto \int_a^x f(t) dt$ admette une limite au point b ; cette limite est encore notée, de manière impropre, $\int_a^b f(t) dt$.

c) Convergence en moyenne, en moyenne quadratique

Les fonctions continues et intégrables sur I à valeurs complexes constituent un sous-espace vectoriel de $\mathcal{C}(I)$; norme de la convergence en moyenne $f \mapsto N_1(f) = \int_I |f|$.

Une fonction continue à valeurs complexes f est dite de carré intégrable sur I si $|f|^2$ est intégrable sur I . Ces fonctions constituent un sous-espace vectoriel de $\mathcal{C}(I)$.

L'application $(f, g) \mapsto (f|g) = \int_I \bar{f}g$ est un produit scalaire, inégalité de Cauchy-Schwarz, norme de la convergence en moyenne quadratique $f \mapsto N_2(f) = (\int_I |f|^2)^{1/2}$.

d) Théorèmes de convergence monotone, de convergence dominée

Théorème de convergence monotone : soit (f_n) une suite croissante de fonctions à valeurs réelles continues par morceaux et intégrables sur I convergeant simplement sur I vers une fonction f continue par morceaux sur I . Alors f est intégrable sur I si et seulement si la suite $(\int_I f_n)$ est majorée. Dans ces conditions,

$$\int_I f = \sup_n \int_I f_n = \lim_n \int_I f_n.$$

Application à l'intégration terme à terme d'une série de fonctions continues par morceaux positives.

Intégration terme à terme d'une série de fonctions : soit (f_n) une suite de fonctions à valeurs réelles ou complexes continues par morceaux et intégrables sur I telles que la série $\sum f_n$ converge simplement sur I vers une fonction f continue par morceaux sur I . Alors si la série $\sum \int_I |f_n|$ converge, f est intégrable sur I et

$$N_1\left(\sum_{n=0}^{+\infty} f_n\right) \leq \sum_{n=0}^{+\infty} N_1(f_n), \quad \int_I \sum_{n=0}^{+\infty} f_n = \sum_{n=0}^{+\infty} \int_I f_n.$$

Théorème de convergence dominée : soit (f_n) une suite de fonctions à valeurs réelles ou complexes continues par morceaux et intégrables sur I et φ une fonction continue par morceaux, positive et intégrable sur I . Si (f_n) converge simplement sur I vers une fonction f continue par morceaux sur I et si, pour tout entier n , $|f_n| \leq \varphi$ (hypothèse de domination), alors f est intégrable sur I et

$$\int_I f = \lim_n \int_I f_n.$$

Étant données une fonction f à valeurs réelles ou complexes et φ une fonction intégrable à valeurs positives, intégration des relations de domination $f = O(\varphi)$ et de négligeabilité $f = o(\varphi)$.

Aucune connaissance spécifique sur les intégrales semi-convergentes n'est exigible des étudiants.

Lorsque I est borné, la convergence uniforme implique la convergence en moyenne et, dans ces conditions, $\int_I \lim_n f_n = \lim_n \int_I f_n$.

Le produit de deux fonctions continues f et g de carré intégrable sur I est intégrable sur I .

Inégalités

$$|(f|g)| \leq N_1(fg) \leq N_2(f) N_2(g);$$

continuité du produit scalaire.

Lorsque la suite (f_n) converge vers f uniformément sur tout segment de I , la démonstration de ce théorème est exigible des étudiants. Dans le cas général, elle est hors programme.

Lorsque la série $\sum f_n$ converge vers f uniformément sur tout segment de I , la démonstration de ce théorème est exigible des étudiants. Dans le cas général, elle est hors programme.

Il convient d'insister sur l'importance de l'hypothèse de convergence de la série $\sum \int_I |f_n|$.

Lorsque la suite (f_n) converge vers f uniformément sur tout segment de I , la démonstration de ce théorème est exigible des étudiants. Dans le cas général, elle est hors programme.

Il convient d'insister sur l'importance de l'hypothèse de domination.

e) Intégrales dépendant d'un paramètre

L'objectif est d'étendre les théorèmes de continuité et de dérivation sous le signe $\int$, déjà étudiés sur un segment, au cas d'un intervalle I quelconque dont l'origine et l'extrémité (prises dans $\bar{\mathbf{R}}$) sont notées a et b . Les démonstrations de ces théorèmes ne sont pas exigibles des étudiants.

Continuité sous le signe $\int$: soit f une fonction à valeurs réelles ou complexes continue sur $A \times I$, où A est une partie de $\mathbf{R}^m$ telle que, pour tout élément x de A , la fonction $t \mapsto f(x, t)$ soit intégrable sur I , et φ une fonction continue positive intégrable sur I . Alors si pour tout élément (x, t) de $A \times I$ $|f(x, t)| \leq \varphi(t)$ (hypothèse de domination), la fonction g définie sur A par la relation $g(x) = \int_a^b f(x, t) dt$ est continue sur A .

Extension au cas où l'hypothèse de domination est vérifiée sur toute partie compacte contenue dans A .

Dérivation sous le signe $\int$ (formule de Leibniz) : soit A un intervalle de $\mathbf{R}$ et f une fonction vérifiant les hypothèses du théorème précédent et admettant une dérivée partielle $\frac{\partial f}{\partial x}$ vérifiant elle aussi ces mêmes hypothèses. Alors g est de classe $\mathcal{C}^1$ sur A , et

Extension aux fonctions de classe $\mathcal{C}^k$.

$$g'(x) = \int_a^b \frac{\partial f}{\partial x}(x, t) dt.$$

Définition de la fonction Γ sur $]0, +\infty[$ par la relation

$$\Gamma(x) = \int_0^{+\infty} e^{-t} t^{x-1} dt.$$

Relation fonctionnelle $\Gamma(x+1) = x\Gamma(x)$.

Relations $\Gamma(n+1) = n!$, $\Gamma(\frac{1}{2}) = \sqrt{\pi}$.

La fonction Γ est de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur $]0, +\infty[$ et, pour tout entier k ,

$$D^k \Gamma(x) = \int_0^{+\infty} (\ln t)^k e^{-t} t^{x-1} dt.$$

La démonstration de la relation $\Gamma(\frac{1}{2}) = \sqrt{\pi}$ n'est pas exigible des étudiants.

5- Courbes d'un espace vectoriel normé de dimension finie

L'objectif de ce chapitre est double :

- Consolider l'étude des courbes planes abordée en classe de première année, tant du point de vue affine (étude locale et asymptotique) que métrique (abscisse curviligne, repère de Frenet, courbure). Aucune connaissance sur l'expression de la courbure en coordonnées cartésiennes et en coordonnées polaires n'est exigible des étudiants.
- Exploiter les résultats obtenus sur les fonctions à valeurs vectorielles pour l'étude cinématique et géométrique des courbes d'un espace vectoriel F de dimension finie. Dans l'espace de dimension 3, le repère de Frenet, la courbure et la torsion sont hors programme ; il en est de même pour la cinématique du solide, dans le plan ou dans l'espace.

La démarche du programme est de partir du point de vue cinématique (donnée d'un paramétrage) et d'introduire ensuite la notion de propriété géométrique en étudiant l'effet d'un changement de paramétrage.

Dans ce chapitre, on considère des fonctions f à valeurs dans un espace vectoriel normé F de dimension finie, de classe $\mathcal{C}^k$ sur un intervalle I , où $1 \leq k \leq +\infty$.

a) Courbes paramétrées

Courbes paramétrées (ou arcs paramétrés) de classe $\mathcal{C}^k$.

Interprétation cinématique : mouvement, vitesse, accélération.

Effet d'un changement de paramétrage, paramétrage admissible. Trajectoire d'un mouvement, orientation. Point régulier (à l'ordre 1).

Les changements de paramétrage sont supposés de classe $\mathcal{C}^k$ ainsi que leurs applications réciproques.

b) Étude locale d'un arc orienté Γ de classe $\mathcal{C}^k$

Définition des demi-tangentes en un point A de Γ , de la tangente en un point A . Existence d'une tangente en un point régulier.

Dans le cas d'une courbe plane, cas d'un point A où l'un au moins des vecteurs dérivés successifs est non nul.

L'étude locale en un point où tous les vecteurs dérivés successifs sont nuls est hors programme.

c) Étude métrique d'un arc orienté

Dans ce paragraphe, on suppose que F est un espace vectoriel euclidien.

Pour un arc orienté Γ régulier à l'ordre 1, vecteur unitaire de la tangente. Définition d'une abscisse curviligne : fonction s de classe $\mathcal{C}^1$ sur I telle que

$$s' = \|f'\|_2.$$

L'abscisse curviligne est un paramétrage admissible. Paramétrage normal d'un arc.

La longueur d'un arc est définie à l'aide de l'abscisse curviligne. Aucune connaissance spécifique sur une définition géométrique de cette longueur n'est exigible des étudiants.

Travaux pratiques

Exemples d'emploi du calcul différentiel et intégral pour l'étude globale des fonctions.

Obtention de majorations et minorations de suites et de fonctions, recherche d'extrémums, inégalités de convexité...

§ Exemples de méthodes de calcul de valeurs approchées d'intégrales et de comparaison de leurs performances.

La démarche consiste à subdiviser l'intervalle d'intégration et à approcher, sur chaque sous-intervalle, la fonction à intégrer par une fonction polynomiale.

Exemples d'étude de l'intégrabilité d'une fonction.

Exemples d'étude du comportement asymptotique au voisinage de $+\infty$ d'une primitive d'une fonction continue sur $[a, +\infty[$.

Il convient notamment d'exploiter l'intégration par parties.

Exemples d'étude d'une fonction définie comme limite d'une suite de fonctions ou comme somme d'une série de fonctions (continuité, dérivation, intégration...).

Exemples d'étude d'une fonction définie par une intégrale dépendant d'un paramètre (transformées de Fourier, transformées de Laplace, intégrales eulériennes...).

Il convient d'exploiter les représentations intégrales pour la recherche et l'étude de solutions d'équations différentielles linéaires.

§ Exemples d'étude de courbes paramétrées du plan ou de l'espace et d'emploi de paramétrages d'ensembles du plan ou de l'espace définis par des conditions géométriques.

Il convient d'exploiter le langage de la géométrie différentielle pour illustrer le comportement de systèmes dynamiques continus.

Exemples d'emploi d'une base orthonormale mobile pour le calcul de la dérivée d'une fonction vectorielle.

Aucun énoncé général sur la dérivation d'une base orthonormale mobile n'est exigible des étudiants.

Exemples d'étude de propriétés métriques de courbes planes (longueur d'un arc, repère de Frenet, courbure).

Exemples de recherche de courbes planes définies par une condition différentielle.

III. SÉRIES, SÉRIES ENTIÈRES, SÉRIES DE FOURIER

Cette partie est organisée autour de quatre objectifs :

- Approfondir l'étude des séries de nombres réels ou complexes : sommation des relations de comparaison, comparaison à une intégrale ; applications à l'étude du comportement asymptotique des restes d'une série convergente, des sommes partielles d'une série divergente.
- Donner quelques notions sur les suites doubles sommables, en vue d'étudier des problèmes d'interversion de sommation.
- Étudier les propriétés élémentaires des séries entières et des séries de Fourier.
- Exploiter la représentation des fonctions par des séries entières ou des séries de Fourier pour l'étude de fonctions définies comme solutions d'une équation, en relation avec l'enseignement des autres disciplines scientifiques.

1- Séries, suites doubles sommables

a) Sommation des relations de comparaison

Étant données deux suites (a_n) et (b_n) de nombres réels positifs, sommation des relations de comparaison : domination $b_n = O(a_n)$, négligeabilité $b_n = o(a_n)$, équivalence $b_n \sim a_n$ (cas des séries convergentes, cas des séries divergentes).

Étant données une suite (u_n) de nombres complexes et une suite (a_n) de nombres réels positifs telle que $\sum a_n$ converge, sommation des relations de domination $u_n = O(a_n)$ et de négligeabilité $u_n = o(a_n)$.

b) Comparaison d'une série à une intégrale

Comparaison d'une série de nombres réels positifs à une intégrale : étant donnée une fonction f continue par morceaux sur $[0, +\infty[$ à valeurs réelles positives décroissante, la série de terme général

$$w_n = \int_{n-1}^n f(t) dt - f(n)$$

est convergente. En particulier, la série $\sum f(n)$ converge si et seulement si f est intégrable sur $[0, +\infty[$.

Comparaison d'une série de nombres complexes à une intégrale : étant donnée une fonction f de classe $\mathcal{C}^1$ sur $[0, +\infty[$ à valeurs complexes, telle que f' soit intégrable sur $[0, +\infty[$, la série de terme général

$$w_n = \int_{n-1}^n f(t) dt - f(n)$$

est absolument convergente.

Équivalent de $n!$ (formule de Stirling).

La relation $w_n = \int_{n-1}^n [f(t) - f(n)] dt$ permet d'encadrer w_n ; un encadrement analogue peut être obtenu lorsque f est croissante.

Il convient de souligner l'intérêt de l'intégration par parties pour écrire w_n sous la forme

$$w_n = - \int_{n-1}^n (t - n + 1) f'(t) dt.$$

La démonstration de la formule de Stirling n'est pas exigible des étudiants.

c) Suites doubles sommables

Le programme introduit la notion d'ensemble dénombrable et de famille sommable de nombres réels ou complexes indexée par un tel ensemble I . Il s'agit d'une brève extension de la notion de suite sommable. L'étude systématique des ensembles dénombrables n'est pas un objectif du programme, et tout énoncé général sur les familles sommables (associativité par paquets...) est hors programme.

Définition d'un ensemble I dénombrable : il existe une bijection d'une partie de $\mathbf{N}$ sur I . Si I est infini, alors il existe une bijection de $\mathbf{N}$ sur I .

Un ensemble I est dénombrable si et seulement s'il existe une suite croissante (J_n) de parties finies de I dont la réunion est égale à I .

Extension de la définition des suites sommables au cas des familles $(u_i)_{i \in I}$ de nombres réels positifs, puis de nombres réels ou complexes, indexées par un ensemble dénombrable I . Cas où $I = \mathbf{Z}$, où $I = \mathbf{N} \times \mathbf{N}$.

Si P est une partie infinie de $\mathbf{N}$, il existe une bijection strictement croissante et une seule de $\mathbf{N}$ sur P .

La démonstration de ce résultat n'est pas exigible des étudiants.

Comme dans le cas particulier où $I = \mathbf{N}$, la démarche consiste à utiliser des suites croissantes (J_n) de parties finies de I dont la réunion est égale à I .

Interversion de sommations : une famille $u = (u_{p,q})$ de nombres réels positifs indexée par $\mathbf{N} \times \mathbf{N}$ est sommable si et seulement si, pour tout entier q , la série $\sum_p u_{p,q}$ est convergente, ainsi que la série $\sum_q \left(\sum_p u_{p,q} \right)$.

Extension de la formule d'interversion de sommations au cas d'une famille $u = (u_{p,q})$ de nombres réels ou complexes, lorsque u est sommable.

Somme d'une famille produit : si les suites (a_p) et (b_q) sont sommables, alors la famille $(a_p b_q)$ l'est aussi.

Définition du produit de Cauchy de deux séries $\sum u_n$ et $\sum v_n$ de nombres complexes :

$$w_n = \sum_{p+q=n} u_p v_q.$$

Si les séries $\sum u_n$ et $\sum v_n$ sont absolument convergentes, la série $\sum w_n$ l'est aussi.

Dans ces conditions,

$$\sum_{p,q} u_{p,q} = \sum_{q=0}^{+\infty} \left(\sum_{p=0}^{+\infty} u_{p,q} \right) = \sum_{p=0}^{+\infty} \left(\sum_{q=0}^{+\infty} u_{p,q} \right).$$

Pour établir la sommabilité de u , il convient de noter que la formule d'interversion peut être appliquée à la famille $|u| = (|u_{p,q}|)$.

Dans ces conditions,

$$\sum_{p,q} a_p b_q = \left(\sum_{p \in \mathbf{N}} a_p \right) \left(\sum_{q \in \mathbf{N}} b_q \right).$$

Dans ces conditions,

$$\sum_{n=0}^{+\infty} w_n = \left(\sum_{p=0}^{+\infty} u_p \right) \left(\sum_{q=0}^{+\infty} v_q \right).$$

3- Séries entières

L'objectif de ce chapitre est double :

- Étudier la convergence d'une série entière et les propriétés de sa somme, grâce au concept fondamental de rayon de convergence.
- Introduire la notion de développement d'une fonction en série de Taylor, notamment pour le développement en série entière des fonctions élémentaires.

En ce qui concerne le développement de $t \mapsto e^{tz}$ où t est réel et z complexe, il s'agit d'établir que cette fonction, déjà étudiée en première année, est aussi égale à $t \mapsto \exp tz$, définie à partir de la série exponentielle d'un nombre complexe.

Les coefficients des séries entières considérées dans ce paragraphe sont réels ou complexes.

a) Rayon de convergence d'une série entière

Série entière $\sum a_n z^n$ d'une variable complexe z associée à une suite (a_n) de nombres complexes : définition du rayon de convergence R (fini ou non).

Étant donné un nombre réel $\rho > 0$ tel que $|a_n| \rho^n$ soit borné, alors pour tout nombre complexe z tel que $|z| < \rho$, $|a_n z^n|$ est dominé par $\left(\frac{|z|}{\rho} \right)^n$.

La série est absolument convergente sur le disque (ouvert) de convergence. Elle est normalement convergente sur tout compact du disque de convergence ; continuité de la somme sur le disque de convergence.

Rayon de convergence de la somme et du produit de Cauchy de deux séries entières. Linéarité de la somme, somme du produit de Cauchy.

En dehors du cas où $\sum |a_n| R^n$ converge, tout énoncé général sur la convergence de la série en un point du cercle $|z| = R$ et sur les propriétés de la somme de la série en un tel point est hors programme.

Relation

$$\exp(z + z') = \exp z \exp z'.$$

b) Séries entières d'une variable réelle

Étant donnée une série entière $\sum a_n t^n$ d'une variable réelle t dont le rayon de convergence R est strictement positif, une primitive sur l'intervalle $] - R, R[$ de la somme f de cette série s'obtient en intégrant terme à terme.

Invariance du rayon de convergence d'une série entière par intégration terme à terme, par dérivation terme à terme.

La somme f d'une série entière $\sum a_n t^n$ dont le rayon de convergence R est strictement positif est une fonction de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur $] -R, R[$. En outre, pour tout $k \geq 1$, $D^k f$ s'obtient par dérivation terme à terme.

En particulier, pour tout entier k positif ou nul,

$$a_k = \frac{1}{k!} D^k f(0).$$

Définition d'une fonction développable en série entière sur un intervalle $] -r, r[$, où $r > 0$.

Définition de la série de Taylor d'une fonction f de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur un intervalle $] -r, r[$, où $r > 0$.

Développement en série de Taylor de e^{tz} où z est complexe, de $\sin t$, de $\cos t$. Développement de $\ln(1+t)$, de $(1+t)^\alpha$ où α est réel.

4- Séries de Fourier

L'objectif de ce chapitre est triple :

- Étudier les coefficients de Fourier d'une fonction f périodique, et notamment leur comportement asymptotique en fonction de la régularité de f .
- Étudier la convergence en moyenne quadratique des sommes partielles $S_p(f)$ de la série de Fourier de f en utilisant la structure d'espace préhilbertien.
- Étudier la convergence ponctuelle des sommes $S_p(f)$: convergence normale, théorème de Dirichlet.

Il convient d'exploiter l'interprétation en termes d'analyse harmonique des signaux périodiques.

Dans ce chapitre, les fonctions considérées sont à valeurs complexes, 2π -périodiques et continues par morceaux sur $\mathbf{R}$. Le cas des fonctions T -périodiques s'y ramène par changement de variable.

a) Coefficients de Fourier

Espace vectoriel des fonctions à valeurs complexes 2π -périodiques continues par morceaux sur $\mathbf{R}$.

Intégrale sur une période d'une fonction f à valeurs complexes 2π -périodique continue par morceaux sur $\mathbf{R}$.

Définition des coefficients de Fourier d'une telle fonction :

$$\hat{f}(n) = c_n(f) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(t) e^{-int} dt.$$

Expression des coefficients de Fourier sous forme de cosinus et de sinus.

Pour tout entier naturel p , définition de la somme partielle :

$$S_p(f)(x) = \sum_{n=-p}^p c_n(f) e^{inx}.$$

L'application $\mathcal{F}$ qui à f associe $\hat{f}$ est linéaire. La suite $\hat{f}$ est bornée et $\|\hat{f}\|_{\infty} \leq \|f\|_1$.

En outre, $c_n(f)$ tend vers 0 au voisinage de l'infini.

Coefficients de Fourier d'une dérivée : si f est 2π -périodique continue sur $\mathbf{R}$ et de classe $\mathcal{C}^1$ par morceaux sur $\mathbf{R}$, alors

$$c_n(Df) = in c_n(f).$$

Extension au cas où f est de classe $\mathcal{C}^{k-1}$ sur $\mathbf{R}$ et de classe $\mathcal{C}^k$ par morceaux sur $\mathbf{R}$.

b) Convergence en moyenne quadratique.

Dans ce paragraphe, on considère des fonctions 2π -périodiques continues sur $\mathbf{R}$. Il convient d'effectuer une brève extension au cas des fonctions continues par morceaux ; les démonstrations concernant cette extension ne sont pas exigibles des étudiants.

Produit scalaire $(f, g) \mapsto (f|g) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \bar{f}(t) g(t) dt$ sur l'espace vectoriel $\mathcal{C}_{2\pi}$ des fonctions 2π -périodiques continues sur $\mathbf{R}$; norme associée $f \mapsto \|f\|_2$.

La projection orthogonale d'un élément f de $\mathcal{C}_{2\pi}$ sur le sous-espace vectoriel $\mathcal{P}_p$ engendré par les e_n , où $|n| \leq p$, est la somme partielle $S_p(f)$.

Relation

$$\|f\|^2 = (\|S_p(f)\|_2)^2 + d(f, \mathcal{P}_p)^2.$$

Inégalité de Bessel :

$$\sum_{n=-p}^p |c_n(f)|^2 \leq (\|f\|_2)^2.$$

Convergence en moyenne quadratique : pour tout élément f de $\mathcal{C}_{2\pi}$, les sommes partielles $S_p(f)$ convergent en moyenne quadratique vers f .

L'application linéaire $f \mapsto \hat{f}$ de $\mathcal{C}_{2\pi}$ dans $\ell^2(\mathbf{Z})$ conserve le produit scalaire ; elle est donc injective.

Définition d'une fonction 2π -périodique continue par morceaux f à partir d'une fonction g continue par morceaux sur un segment de longueur 2π .

Coefficients de Fourier de $\bar{f}$; cas d'une fonction à valeurs réelles. Coefficients de Fourier de $t \mapsto f(-t)$; cas d'une fonction paire, d'une fonction impaire. Effet d'une translation : coefficients de Fourier de $t \mapsto f(t+a)$.

Lorsque qu'en un point x de $\mathbf{R}$ les sommes partielles $S_p(f)$ convergent, la série de Fourier est dite convergente au point x et la somme de la série de Fourier est, par définition, la limite des sommes $S_p(f)(x)$.

Par définition $\|f\|_1 = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} |f(t)| dt$.

Si f est 2π -périodique de classe $\mathcal{C}^{k-1}$ sur $\mathbf{R}$ et de classe $\mathcal{C}^k$ par morceaux sur $\mathbf{R}$, alors $c_n(f)$ est négligeable devant $|n|^{-k}$ au voisinage de l'infini.

Les fonctions $t \mapsto e_n(t) = e^{int}$, où n parcourt $\mathbf{Z}$, forment une famille orthonormale et, pour tout n , $c_n(f) = (e_n|f)$.

En particulier, l'application qui à tout élément P de $\mathcal{P}_p$ associe $\|f - P\|_2$ atteint son minimum en un point et un seul, à savoir $S_p(f)$.

La famille $(c_n(f))$, où n parcourt $\mathbf{Z}$, est de carré sommable.

Formule de Parseval : expressions du carré de la norme et du produit scalaire à l'aide des coefficients de Fourier.

c) Convergence ponctuelle

Convergence normale : lorsque f est 2π -périodique continue sur $\mathbf{R}$ et de classe $\mathcal{C}^1$ par morceaux sur $\mathbf{R}$, la famille $(c_n(f))$, où n parcourt $\mathbf{Z}$, est sommable. Dans ces conditions, les sommes partielles $S_p(f)$ de la série de Fourier de f convergent uniformément vers f sur $\mathbf{R}$.

Théorème de Dirichlet : soit f une fonction 2π -périodique de classe $\mathcal{C}^1$ par morceaux sur $\mathbf{R}$, alors pour tout nombre réel x , la série de Fourier de f converge en ce point et sa somme est égale à $\frac{1}{2} \lim_h [f(x+h) + f(x-h)]$ où h tend vers 0, $h > 0$. En particulier, en tout point x où f est continue, la somme de la série de Fourier de f est égale à $f(x)$.

En particulier, pour tout nombre réel x , la série de Fourier de f converge en ce point, et sa somme est égale à $f(x)$.

La démonstration du théorème de Dirichlet n'est pas exigible des étudiants.

Travaux pratiques

§ Pour une série de nombres réels positifs, exemples d'encadrement du reste d'une série convergente, des sommes partielles d'une série divergente; exemples de recherche de valeurs approchées de la somme d'une série convergente.

Exemples d'étude du comportement asymptotique des restes d'une série convergente, des sommes partielles d'une série divergente.

§ Exemples de recherche et d'emploi de développements en série entière ou en série de Fourier de fonctions d'une variable réelle; exemples d'utilisation de tels développements pour l'approximation d'une fonction.

Il convient notamment d'exploiter la comparaison d'une série à une intégrale.

Il convient de mettre en valeur l'emploi de séries entières et de séries de Fourier pour la recherche et l'étude de solutions d'équations différentielles.

IV. ÉQUATIONS DIFFÉRENTIELLES

L'objectif de cette partie est d'étudier les systèmes différentiels linéaires et d'introduire quelques notions sur le cas non linéaire, en relation étroite avec la géométrie différentielle et les systèmes dynamiques continus.

Il convient de relier cette étude à l'enseignement des autres disciplines scientifiques (systèmes mécaniques ou électriques gouvernés par une loi d'évolution et une condition initiale, traitement du signal). Il convient d'étudier le comportement du signal de sortie associé à différents types de signaux d'entrée et de dégager la signification de certains paramètres ou comportements : stabilité, régime permanent, oscillation, amortissement, fréquences propres, résonance. On peut alors être amené à étendre la notion de solution (fonction $\mathcal{C}^1$ ou $\mathcal{C}^2$ par morceaux).

1- Équations différentielles linéaires

L'objectif de ce chapitre est triple :

- Étudier les équations linéaires d'ordre 1 à valeurs vectorielles, et leurs traductions en termes de systèmes d'équations différentielles linéaires scalaires d'ordre 1.
- Étudier le cas particulier d'une équation linéaire d'ordre 1 à coefficients constants, en relation avec l'exponentielle d'un endomorphisme et avec la réduction des endomorphismes.
- Étudier le cas particulier des équations linéaires scalaires d'ordre 1 ou 2.

Les applications considérées dans cette partie sont définies sur un intervalle I de $\mathbf{R}$ et à valeurs dans un espace vectoriel normé F de dimension finie sur $\mathbf{R}$ ou $\mathbf{C}$.

a) Équations linéaires d'ordre 1

Définition d'une solution sur I de l'équation différentielle linéaire $x' = a(t)x + b(t)$ où a désigne une application continue de I dans $\mathcal{L}(F)$ et b une application continue de I dans F .

Existence et unicité de la solution sur I du problème de Cauchy.

Traduction en termes matriciels, en termes de systèmes d'équations différentielles linéaires scalaires d'ordre 1.

La démonstration de ce théorème n'est pas exigible des étudiants.

Les solutions sur I de l'équation $x' = a(t)x$ constituent un sous-espace vectoriel $\mathcal{E}$ de $\mathcal{C}^1(I)$. En outre, étant donné un élément α de I , l'application qui à tout élément f de $\mathcal{E}$ associe $f(\alpha)$ est un isomorphisme de $\mathcal{E}$ sur F .

Définition d'un système fondamental $(e_1, e_2, \dots, e_n)$ de l'équation $x' = a(t)x$. Caractérisation d'un tel système; wronskien.

b) Équations linéaires à coefficients constants

Étude de l'équation $x' = ax$, où a est un endomorphisme de F . L'unique solution sur $\mathbf{R}$ du problème de Cauchy $x' = ax$, $x(0) = e$ où e est un vecteur de F , est la fonction $t \mapsto (\exp ta)e$. Relation $\exp sa \cdot \exp ta = \exp(s+t)a$.

Expression intégrale de la solution de $x' = ax + b(t)$.

c) Équations linéaires scalaires d'ordre 1 ou 2

Équation $a(t)x' + b(t)x = c(t)$ où a , b et c sont continues sur I à valeurs réelles ou complexes.

Équation $a(t)x'' + b(t)x' + c(t)x = d(t)$ où a , b , c et d sont continues sur I à valeurs réelles ou complexes. Lorsque a ne s'annule pas sur I , système d'ordre 1 associé, existence et unicité de la solution sur I du problème de Cauchy, structure de l'espace des solutions de l'équation homogène, systèmes fondamentaux de solutions, wronskien.

En particulier, la dimension de $\mathcal{E}$ est égale à $n = \dim F$.

Application à la résolution de l'équation différentielle $x' = a(t)x + b(t)$ par la méthode de variation des constantes.

Traduction matricielle $X' = AX$, où A est une matrice à éléments réels ou complexes.

Structure de l'espace des solutions lorsque a ne s'annule pas sur I .

Application à la résolution de l'équation par la méthode de variation des constantes.

Expression des solutions dans le cas où l'on connaît une solution de l'équation homogène associée ne s'annulant pas sur I .

2- Notions sur les équations différentielles non linéaires

L'objectif de ce chapitre est d'introduire quelques notions de base sur les équations différentielles autonomes d'ordre 1 et les systèmes différentiels autonomes d'ordre 2, et de les appliquer aux cas d'une équation autonome d'ordre 2 et d'une équation non autonome d'ordre 1.

Il s'agit essentiellement de familiariser les étudiants avec le concept de système autonome et de mettre en œuvre les résultats du cours sur des exemples simples. Aucune connaissance spécifique sur les propriétés des solutions maximales et des courbes intégrales n'est exigible des étudiants.

Il convient de valoriser les interprétations géométriques, en termes de courbes intégrales de champs de vecteurs du plan, en relation avec l'étude des systèmes dynamiques continus issus des autres sciences, et notamment la mécanique, la physique et l'automatique.

a) Systèmes différentiels autonomes

Définition d'une solution d'un système différentiel autonome d'ordre 2, de la forme $x' = f(x, y)$, $y' = g(x, y)$ où f et g sont des fonctions à valeurs réelles de classe $\mathcal{C}^1$ sur un ouvert U de $\mathbf{R}^2$. Invariance par translation. Définition d'une solution maximale. Interprétation géométrique : courbe intégrale d'un champ de vecteurs.

Existence et unicité locale d'une solution du problème de Cauchy.

Prolongement d'une solution φ en une borne a de son intervalle de définition lorsque φ admet une limite b au point a , où $b \in U$.

b) Équations non autonomes

Définition d'une solution d'une équation différentielle de la forme $x' = f(t, x)$ où f est à valeurs réelles et de classe $\mathcal{C}^1$ sur un ouvert U de $\mathbf{R}^2$.

Cas d'une équation différentielle autonome d'ordre 1, de la forme $x' = f(x)$ où f est une fonction à valeurs réelles de classe $\mathcal{C}^1$ sur un intervalle I .

Système autonome d'ordre 2 associé à une équation différentielle autonome d'ordre 2, de la forme $x'' = f(x, x')$, où f est à valeurs réelles de classe $\mathcal{C}^1$ sur un ouvert U de $\mathbf{R}^2$.

La démonstration de ce théorème est hors programme.

Existence et unicité d'une solution maximale du problème de Cauchy ; son intervalle de définition est ouvert.

Existence et unicité d'une solution maximale du problème de Cauchy.

Travaux pratiques

§ Pratique de la résolution de l'équation $X' = AX$, où A est une matrice à éléments réels ou complexes (par réduction de A à une forme diagonale ou triangulaire).

Exemples d'étude de solutions d'équations différentielles linéaires d'ordre 1 ou 2.

§ Exemples d'étude d'équations associées à une forme différentielle exacte, d'équations à variables séparables.

§ Exemples de recherche et d'étude de courbes intégrales d'un champ de vecteurs dans le plan.

Il convient d'étudier quelques exemples de raccordements de solutions.

Cas d'une équation autonome d'ordre 1, de la forme $x' = f(x)$.

V. FONCTIONS DE PLUSIEURS VARIABLES RÉELLES

L'objectif de cette partie est triple :

- Consolider les acquis de première année : calcul différentiel et intégral portant sur les fonctions numériques de deux variables réelles.
- Étendre les notions de base du calcul différentiel aux applications continûment différentiables sur un ouvert de $\mathbf{R}^p$ à valeurs dans $\mathbf{R}^n$, en relation avec la géométrie différentielle et l'analyse vectorielle.
- Effectuer une étude élémentaire des formes différentielles de degré 1 (intégrales curvilignes, primitives) en relation avec l'étude des champs de vecteurs, la mécanique et la physique.

1- Calcul différentiel

L'objectif essentiel est d'étudier quelques notions de base : différentielle en un point, dérivée selon un vecteur, dérivées partielles, applications continûment différentiables, difféomorphismes, gradient, points critiques, dérivées partielles d'ordre supérieur.

Les applications f considérées dans ce chapitre sont définies sur un ouvert U de E à valeurs dans F , où E et F sont des espaces vectoriels de dimension finie. Pour la pratique, le programme se limite au cas où $\dim E \leq 3$, $\dim F \leq 3$ et où f est de classe $\mathcal{C}^1$. L'étude de fonctions différentiables non de classe $\mathcal{C}^1$ est hors programme.

Pour l'étude d'une fonction f de plusieurs variables, il convient de mettre en valeur le fait que la plupart des problèmes peuvent se ramener au problème correspondant pour une fonction d'une variable en paramétrant le segment $[a, a+h]$, ce qui permet d'écrire $f(a+h) - f(a) = \varphi_h(1) - \varphi_h(0)$ où, pour tout $t \in [0, 1]$, $\varphi_h(t) = f(a+th)$.

a) Applications continûment différentiables

Définition d'une fonction f différentiable en un point a de U et de l'application linéaire tangente à f en a , appelée aussi différentielle de f au point a et notée $df(a)$.

Définition de la dérivée de f en un point a de U selon un vecteur h , notée $D_h f(a)$. Définition des dérivées partielles dans une base de E , notées $D_j f(a)$ ou $\frac{\partial f}{\partial x_j}(a)$.

Si f est différentiable au point a , elle est continue en ce point et admet des dérivées selon tout vecteur h ; en outre,

$$df(a)(h) = D_h f(a).$$

Interprétation en termes de développement limité de f à l'ordre 1.

Il existe un nombre réel $\delta > 0$ tel que, pour tout $t \in [-\delta, \delta]$, $a + th$ appartienne à U ; on pose alors $\varphi_h(t) = f(a + th)$. Si φ_h est dérivable à l'origine, on dit que f admet une dérivée en a selon h , et l'on pose $D_h f(a) = \varphi_h'(0)$.

Dans toute base de E ,

$$df(a)(h) = D_h f(a) = \sum_{j=1}^p h_j D_j f(a).$$

Définition des fonctions de classe $\mathcal{C}^1$ (ou continûment différentiables) sur U : pour tout vecteur h de E , $x \mapsto D_h f(x)$ est continue sur U .

Théorème fondamental : si, dans une base de E , les dérivées partielles $D_j f$ sont continues sur U , alors f est différentiable en tout point a de U . En outre, f est de classe $\mathcal{C}^1$ sur U .

La démonstration de ce résultat n'est pas exigible des étudiants.

Si f est une application linéaire de E dans F , alors f est de classe $\mathcal{C}^1$ sur E et, pour tout point a de E , $df(a) = f$.

Si f et g sont deux applications de classe $\mathcal{C}^1$, leur composée $g \circ f$ l'est aussi; différentielle de $g \circ f$. Définition d'un difféomorphisme de classe $\mathcal{C}^1$. Opérations algébriques sur les applications de classe $\mathcal{C}^1$.

Pour une application de classe $\mathcal{C}^1$, matrice jacobienne associée à des bases de E et de F ; lorsque $E = F$, jacobien.

Dérivée d'une fonction composée de la forme $f \circ \varphi$, où φ est une fonction de classe $\mathcal{C}^1$ sur un intervalle I et à valeurs dans U .

Caractérisation à l'aide du jacobien des difféomorphismes parmi les applications injectives de classe $\mathcal{C}^1$.

b) Fonctions numériques continûment différentiables

Algèbre $\mathcal{C}^1(U)$ des fonctions de classe $\mathcal{C}^1$ sur U .

Lorsque E est un espace euclidien, le gradient de f est défini par

$$df(a)(h) = D_h f(a) = (\text{grad} f(a) | h).$$

Lorsque l'ouvert U est convexe, inégalité des accroissements finis pour une fonction numérique de classe $\mathcal{C}^1$ sur U .

Points critiques d'une fonction numérique de classe $\mathcal{C}^1$; condition nécessaire d'existence d'un extrémum local.

c) Dérivées partielles d'ordre $k \geq 2$

Théorème de Schwarz pour une fonction de classe $\mathcal{C}^2$ sur U . Algèbre $\mathcal{C}^k(U)$ des fonctions de classe $\mathcal{C}^k$ sur U .

Les opérateurs différentiels D_h sont des applications linéaires de $\mathcal{C}^k(U)$ dans $\mathcal{C}^{k-1}(U)$, où $1 \leq k < +\infty$.

Pour une fonction numérique de classe $\mathcal{C}^2$ sur un ouvert de $\mathbf{R}^2$: formule de Taylor-Young; étude de l'existence d'un extrémum local en un point critique où $rt - s^2 \neq 0$.

d) Coordonnées polaires

Repère polaire $(\vec{u}, \vec{v})$ du plan euclidien $\mathbf{R}^2$ défini, pour tout nombre réel θ , par :

$$\vec{u}(\theta) = \cos \theta \vec{e}_1 + \sin \theta \vec{e}_2,$$

$$\vec{v}(\theta) = -\sin \theta \vec{e}_1 + \cos \theta \vec{e}_2$$

où $(\vec{e}_1, \vec{e}_2)$ est la base canonique de $\mathbf{R}^2$.

Coordonnées polaires d'un point de $\mathbf{R}^2$.

e) Notions sur les courbes et les surfaces

Dans ce paragraphe, les courbes du plan ou de l'espace et les surfaces sont définies par paramétrages ou par équations cartésiennes. Aucune difficulté ne peut être soulevée sur l'équivalence de ces définitions.

L'objectif est double :

- Consolider les notions sur les courbes planes définies par une équation cartésienne $F(x, y) = 0$ étudiées en première année : point régulier, tangente, normale.
- Étudier quelques notions sur les surfaces définies par un paramétrage ou par une équation cartésienne $F(x, y, z) = 0$.

L'étude des courbes d'une surface définies par des conditions différentielles est hors programme.

Toutes les formes du théorème des fonctions implicites utiles pour traiter ce paragraphe sont admises.

Caractérisation d'une application f de classe $\mathcal{C}^1$ sur U à valeurs dans F par ses coordonnées f_i dans une base de F ; alors, pour tout h , les fonctions $D_h f_i$ sont les coordonnées de $D_h f$.

Matrice jacobienne d'une application composée, d'une application réciproque.

Lorsque f est un difféomorphisme, l'image $f(\Gamma)$ d'une courbe paramétrée Γ régulière à l'ordre 1 est une courbe régulière à l'ordre 1; détermination d'une tangente à $f(\Gamma)$.

La démonstration de ce résultat est hors programme.

Expression du gradient dans une base orthonormale de E .

Caractérisation des fonctions constantes sur l'ouvert U .

La démonstration du théorème de Schwarz est hors programme.

Pour toute base de E , $D_h = \sum_{j=1}^n h_j D_j$.

Relations

$$\frac{d\vec{u}}{d\theta} = \vec{v}, \quad \frac{d\vec{v}}{d\theta} = -\vec{u}.$$

Expression des coordonnées du gradient d'une fonction à valeurs réelles f de classe $\mathcal{C}^1$ en fonction des dérivées partielles de la fonction

$$(\rho, \theta) \mapsto F(\rho, \theta) = f(\rho \cos \theta, \rho \sin \theta).$$

Définition d'un point régulier d'une surface définie par paramétrage $(u, v) \mapsto f(u, v)$, où f est de classe $\mathcal{C}^1$ sur un ouvert U de $\mathbf{R}^2$ à valeurs dans $\mathbf{R}^3$. Plan tangent, normale. Tangente à l'intersection de deux surfaces en un point régulier où les deux plans tangents sont distincts.

Position d'une surface donnée par $z = f(x, y)$ par rapport au plan tangent en un point où $rt - s^2 \neq 0$.

Définition d'un point régulier d'une surface définie par une équation cartésienne de la forme $F(x, y, z) = 0$, où F est à valeurs réelles et de classe $\mathcal{C}^1$ sur un ouvert U de $\mathbf{R}^3$. Plan tangent, normale.

2- Calcul intégral

L'objectif de ce chapitre est double :

- *Consolider les acquis de première année concernant les intégrales doubles à travers la pratique de problèmes.*
- *Effectuer une étude élémentaire des formes différentielles de degré 1.*

En vue de l'enseignement des autres disciplines scientifiques, il convient d'effectuer une brève extension du calcul intégral aux intégrales triples mais, en mathématiques, aucune connaissance sur ce point n'est exigible des étudiants.

a) Intégrales doubles

Aucune difficulté théorique ne doit être soulevée sur les notions introduites dans ce paragraphe.

Intégrale double d'une fonction à valeurs réelles ou complexes définie et continue sur une partie compacte définie par des conditions simples (rectangles, secteurs circulaires...).

Formule de Fubini : expressions de l'intégrale double sur un rectangle à l'aide de deux intégrations successives.

Formule de changement de variables dans une intégrale double ; cas du passage en coordonnées polaires.

Aucune connaissance sur l'intégration sur des parties non compactes n'est exigible des étudiants.

La démonstration de ce résultat est hors programme.

b) Intégrales curvilignes

Aucune difficulté théorique ne peut être soulevée sur la notion de forme différentielle.

Définition d'une forme différentielle ω de degré 1 de classe $\mathcal{C}^k$ sur un ouvert U de $\mathbf{R}^p$. Définition d'une primitive sur U d'une telle forme ; définition d'une forme exacte sur U .

Intégrale curviligne de ω sur un arc orienté Γ de U , notation $\int_{\Gamma} \omega$.

Définition d'une forme de classe $\mathcal{C}^1$ fermée sur U . Toute forme de classe $\mathcal{C}^1$ exacte sur U est fermée sur U . Réciproque lorsque l'ouvert U est étoilé.

Interprétation en termes de champs de vecteurs.

Écriture $\omega = \sum_{j=1}^p a_j dx_j$.

Calcul de l'intégrale curviligne d'une forme exacte à l'aide d'une primitive de ω .

La démonstration de cette réciproque n'est pas exigible des étudiants.

Travaux pratiques

Exemples d'emploi de coordonnées polaires, cylindriques ou sphériques.

§ Exemples d'étude de transformations du plan de la forme $z \mapsto f(z)$.

§ Exemples de recherche d'extrémums locaux ou globaux.

Exemples de recherche de solutions d'équations aux dérivées partielles par séparation ou changement de variables.

Exemples de calculs d'intégrales curvilignes et de recherche d'une primitive d'une forme différentielle.

Exemples de calculs d'intégrales doubles, d'aires planes et de volumes.

§ Exemples de représentation d'une surface à l'aide d'une famille de sections planes.

L'étude générale des transformations conformes est hors programme.