

CLASSES MP*

APPROFONDISSEMENT DE LA FORMATION EN MATHÉMATIQUES

Dans les classes MP*, qui préparent principalement aux carrières de l'enseignement supérieur, de la recherche et des grands corps techniques de l'État, il convient de permettre aux étudiants d'approfondir leur formation en mathématiques, sur la base des objectifs de formation et du programme de mathématiques communs aux classes MP et MP*.

Cet approfondissement spécifique aux classes MP* concerne aussi bien le travail de la classe que le travail personnel des étudiants. Il porte conjointement sur l'étude des concepts, des résultats et des méthodes essentiels et sur la maîtrise de la démarche mathématique. Il se réfère à un objectif de développement de la réflexion personnelle des étudiants et de leurs capacités d'autonomie intellectuelle. En revanche, cet approfondissement ne doit en aucun cas conduire à des dépassements de programme prenant la forme d'une étude de chapitres supplémentaires ou d'une anthologie d'exemples et d'exercices, tant en ce qui concerne l'enseignement que les épreuves d'évaluation.

1- En ce qui concerne les objectifs de formation, cet approfondissement spécifique aux classes MP* s'effectue sur la base des objectifs communs aux classes MP et MP*, selon les lignes directrices suivantes :

- stimuler l'imagination et l'intuition des étudiants en leur proposant des questions mathématiques consistantes, dont l'énoncé est présenté de manière ouverte et dont la résolution fait appel à leur initiative pour le choix des méthodes à utiliser ;
- conjointement, exploiter toute la richesse de la démarche et du raisonnement mathématique, en entraînant les étudiants à se poser des questions, analyser un problème, formuler des conjectures, expérimenter sur des exemples, mettre en place un schéma de démonstration, et rédiger enfin une solution rigoureuse ;
- développer la maîtrise de la démonstration, en promouvant la réflexion personnelle des étudiants sur ses différentes phases : l'analyse des définitions, des hypothèses et des conclusions, la mise en lumière de schémas directeurs possibles pour la démonstration et la mise en œuvre rigoureuse d'un tel schéma ;
- renforcer la maîtrise des concepts, des résultats et des méthodes, grâce à une analyse critique de leurs conditions de validité et à une étude synthétique de leur portée et de leur architecture ;
- valoriser l'interaction entre, d'une part, l'étude des phénomènes et des problèmes mathématiques et, d'autre part, la construction et la mise en œuvre des concepts théoriques, mettant ainsi en évidence le rôle central joué par le questionnement scientifique pour le développement des mathématiques, ainsi que leur dimension culturelle et historique ;
- développer les capacités d'analyse et de synthèse des étudiants, notamment grâce à l'étude de thèmes mathématiques faisant appel à différentes parties du programme, et à la lecture personnelle de textes scientifiques.

2- C'est dans le cadre des lignes directrices précédentes qu'il convient de placer l'approfondissement spécifique aux classes MP* de certains points des contenus fixés par le programme commun aux classes MP et MP*.

Dans ce cadre, pour les démonstrations repérées comme non exigibles des étudiants dans ce programme commun, il convient d'augmenter dans les classes MP* la part de celles qui sont effectuées en détail.

Dans ce même cadre, les points sur lesquels portent cet approfondissement et les références correspondantes au programme commun sont précisés ci-dessous.

a) Algèbre et géométrie

- Concernant les groupes et les actions de groupe (cf. paragraphe I.1- b), l'objectif majeur est de mettre en lumière la puissance de ces concepts, notamment pour la compréhension et la résolution des problèmes de type géométrique. Dans cette perspective, il convient de mettre en œuvre la notion de partie génératrice pour l'étude de groupes et d'ensembles sur lesquels ces groupes opèrent, et d'exploiter la notion d'orbite pour l'étude de problèmes de classification (matrices équivalentes, matrices semblables, formes quadratiques équivalentes, ...). Il convient aussi d'étudier quelques exemples fondamentaux d'action d'un groupe : automorphismes intérieurs, éléments conjugués ; action sur un groupe G d'un sous-groupe H de G par translation à gauche, application à l'ordre d'un sous-groupe d'un groupe fini et à l'ordre d'un élément d'un groupe fini.

- Concernant l'anneau $\mathbf{Z}/n\mathbf{Z}$ (cf. paragraphe I.2- b), il convient d'exploiter ses interventions pour l'étude des congruences, notamment grâce au théorème chinois.

- Concernant les espaces vectoriels et les applications linéaires (cf. chapitre II.1), l'objectif est d'élargir le champ d'intervention des méthodes de l'algèbre linéaire. Dans cette perspective, il convient d'appliquer la théorie de la dimension à l'étude, sur des exemples, d'éléments algébriques d'une K -algèbre, où K est un sous-corps de $\mathbf{C}$.

Il convient aussi de noter que la plupart des concepts et des résultats figurant au programme s'étendent sans changement au cas des espaces vectoriels sur un corps commutatif K quelconque et les appliquer à l'étude de questions faisant intervenir l'algèbre linéaire sur le corps $\mathbf{Z}/p\mathbf{Z}$.

- Concernant les espaces vectoriels hermitiens (cf. paragraphe IV.3- b), il s'agit d'étendre les notions et les résultats déjà étudiés dans le cas des espaces vectoriels euclidiens. Dans cette perspective, il convient d'étudier les notions d'adjoint d'un endomorphisme, d'endomorphisme autoadjoint, de matrice hermitienne, d'automorphisme unitaire et de matrice unitaire, ainsi que la réduction d'un endomorphisme autoadjoint. En revanche, aucune connaissance spécifique sur le groupe unitaire n'est exigible des étudiants.

b) Analyse et géométrie différentielle

- Concernant les espaces vectoriels normés (cf. chapitre I.1) et les suites et séries de fonctions (cf. chapitre I.3 et I.4), l'objectif majeur est de familiariser les étudiants avec la démarche propre à l'analyse fonctionnelle. Dans cette perspective, il convient d'établir et d'exploiter, sur des exemples simples, le théorème du point fixe pour les contractions d'une partie complète. Il convient aussi d'étendre les notions et les résultats sur les séries d'éléments d'un espace vectoriel F de dimension finie au cas où F est un espace de Banach, d'effectuer la même extension pour les suites et séries d'applications et d'établir les résultats suivants : pour toute partie A d'un espace vectoriel normé E , l'espace $\mathcal{B}(A, F)$ muni de la norme N_∞ est complet ; lorsque A est compacte, l'espace $\mathcal{C}(A, F)$ muni de la norme N_∞ est complet ; l'espace des applications linéaires continues de E dans F est complet.

- Concernant les espaces vectoriels de dimension finie (cf. chapitre I.2), l'objectif principal est de fournir aux étudiants des méthodes puissantes pour l'étude de problèmes de passage du local au global. Dans cette perspective, il convient d'exploiter d'une part la compacité, grâce au théorème de Borel-Lebesgue, caractérisant les parties fermées bornées d'un espace de dimension finie, et d'autre part la connexité par arcs, en montrant que, si A est connexe par arcs, toute partie non vide P de A à la fois ouverte et fermée dans A est égale à A et que toute application définie sur A et localement constante est constante.

- Concernant les séries entières et la fonction exponentielle complexe (cf. chapitre III.3), il convient de construire les fonctions circulaires et le nombre π , et de mettre en lumière la portée des résultats obtenus en géométrie euclidienne.