lorsque F est complet - conservation de l'uniforme continuité - généralisation E top $A \subset E$, $a \in \bar{A}$, F métrique, $(f_n) \xrightarrow{\text{unif}} f$, $\exists \lim_{x \to a, x \in A} f_n(x) = \ell_n$ alors si (ℓ_n) cv, $\exists \lim_{x \to a, x \in A} f(x) = \lim_{n \to \infty} \ell_n$, si F complet $\exists \lim \ell_n$) - Intégration (F banach, $E = [a,b]$ $(f_n) \xrightarrow{u} f$, f_n C^0 alors $\lim_n \int_a^b f_n = \int_a^b f$) - Dérivabilité (ex $x \mapsto \sqrt{x^2 + \frac{1}{n}}$ C^∞ $\xrightarrow{\text{unif}}$ $x \mapsto |x|$ - $f_n(x) = \frac{\sin nx}{n}$ C^∞ $(f_n) \xrightarrow{\text{unif}} 0$ $f_n'(0) = 1$ - Th si $\exists x_0 \in I$ $f_n(x_0)$ cv., f_n C^1, $(f_n') \xrightarrow{u} g$ alors $f_n \to f$ unif^t sur toute partie bornée, f C^1 et $f' = g$)) - Méthodes d'étude, exemples (étude de la cv simple, variation de $f_n - f$ - ex $x \mapsto \frac{1}{1+nx^2}$, $x \mapsto \frac{x}{1+nx^2}$, $x \mapsto \frac{\sin x}{1+nx^2}$, $x \mapsto \frac{\sin nx}{1+n^2x^2}$) - Séries de fonctions (généralités E qcq, F evn normé (f_n, S_n) - cv simple, uniforme - critère de Cauchy - convergence normale ($\|f_n(x)\| \leq a_n$, $\sum a_n$ cv - si F complet, cv normale $\Rightarrow$ cv uniforme ex $x \mapsto \frac{(-1)^n}{n}$) - F banach, $E = [a,b]$ cv uniforme sur $]a,b[\Rightarrow$ cv unif^t sur $[a,b]$ - $f_n = (-1)^n \varepsilon_n$ ε_n $E \to \mathbb{R}_+$ $\searrow$ cvg^t unif^t vers la fct nulle alors $\sum f_n$ cv. unif^t - Th d'Abel (F banach $f_n = \varepsilon_n a_n$ ε_n $E \to \mathbb{R}_+$ $\searrow$ cvg^t unif^t vers la fct nulle, $\sum_0^n a_k$ unif^t borné alors $\sum \varepsilon_n a_n$ cv unif^t - ex $\sum x^n$, $\sum \frac{1}{n^x}$, $\sum \frac{(-1)^n}{n^x}$, $\sum \frac{e^{inx}}{n}$) - Propriétés (E top, $A \subset E$, $a \in \bar{A}$, f_n $A \to F$ evn, $\sum f_n$ cv unif^t sur A vers S, $\exists \lim f_n(x) = \ell_n$ si $\sum \ell_n$ cv $\exists \lim_{x \to a, x \in A} \sum_0^\infty f_n(x) = \sum_0^\infty \ell_n$, si F complet $\sum \ell_n$ cv - $E = [a,b]$, F banach, f_n C^0: $E \to F$ $\sum f_n$ cv unif^t sur E alors $\int_a^b (\sum_0^\infty f_n(t))dt = \sum_0^\infty \int_a^b f_n(t)dt$ - I int. de $\mathbb{R}$, f_n $I \to F$ banach tq $\exists x_0 \in I$ $\sum f_n(x_0)$ cv, f_n C^1, $\sum f_n'$ cv unif^t alors $\sum f_n$ cv unif^t sur toute partie bornée de I, $\sum f_n$ est C^1 et $(\sum f_n)' = \sum f_n'$ - ex $v_n(x) = \frac{r^n \cos nx}{n}$ $0 \leq r < 1$ $\sum_1^\infty v_n(x) = -\frac{1}{2}\log(1 - 2r\cos t + r^2)$)) - Fonctions réglées (déf $f : [a,b] \to E$ evn f est réglée si f admet en tout pt une lim. à gauche et à droite - f en escalier si $\exists x_0 = a < x_1 < \dots < x_n = b$ $f|_{]x_i, x_{i+1}[}$ cste - Th toute fct réglée est limite uniforme de fct. en escalier, réciproque vraie si E est complet - Corollaire $\mathcal{R} \subset \mathcal{B}$ ens des fct bornées, l'ens des pts de discontinuités d'une fct réglée est au plus dénombrable, E complet $\Rightarrow \mathcal{R}$ complet)

37 Séries entières

Généralités, rayon de convergence (rayon de conv. ($\sum a_n z^n$, $R = \sup\{r \in \mathbb{R}_+, \sum |a_n| r^n$ cv$\}$ - Th $0 < r < R$ normale cv sur $D'(0,r)$, $|z| > R \Rightarrow$ dv. - Rq cvce uniforme sur le disque ouvert $\Rightarrow$ cvce unif. sur le disque fermé) - détermination du rayon de conv. (règle d'Alembert $\exists \lim \frac{|a_{n+1}|}{|a_n|} = \ell \Rightarrow R = \frac{1}{\ell}$, cas $\sum a_n z^2$ - Règle de Cauchy $R = \frac{1}{\overline{\lim} \sqrt[n]{|a_n|}}$ - ex $\sum n! z^n$, $\sum \frac{z^n}{n!}$, $\sum \frac{z^n}{n^2}$, $\sum \frac{z^n}{n}$, $\sum z^n$)) - Somme et produit ($\sum (a_n + b_n) z^n$, $R'' \geq \min(R, R')$, cas $R \neq R'$, série dérivée - produit de Cauchy $R'' \geq \min(R, R')$, ex $\sum z^n$ $R = 1$, $(1-z)$ $R = \infty$ - ex $\sum (1 + \dots + \frac{1}{n}) z^n$) - Pts des sommes de séries entières (continuité - inégalités de Cauchy $|a_n| \leq \frac{M(r)}{r^n}$, $R = +\infty$ et S bornée $\Rightarrow$ S cste - Th d'Abel (si la série cv en 1 pt z_0 $|z_0| = R$, cv uniforme sur $[0, z_0]$ - appl. $\sum a_n$, $\sum b_n$, $\sum c_n$ cv où $c_n = \sum_{p+q=n} a_p b_q$ alors $\sum_0^\infty c_n = (\sum_0^\infty a_n)\sum_0^\infty b_n$)) - dérivabilité (dérivabilité % variable complexe - Th $\sum a_n z^n$ holo. sur $D(0,R)$ de dérivée $\sum_{n \geq 1} n a_n z^{n-1}$ - $S^{(p)}(0) = p!\, a_p$ - ex $(\frac{1}{1-z})^{(p)}$ - unicité du dev. en série entière) - intégration (var. réelle)) - Fonctions développables en séries entières (déf - cond nécessaire f somme de sa série de Taylor - ex $\sum_0^\infty e^{-n} e^{-n^2 x}$, $e^{-\frac{1}{x^2}}$ - condition suffisante $|f^{(n)}(x)| \leq \frac{M\, n!}{r^n}$ si $x \in]-r, r[$ où $|f^n(x)| \leq M$ sur I - $\sum_0^\infty a_n z^n$, $R > 0$ est analytique sur $D(0,R)$ (série double), coef $\frac{1}{p!} S^{(p)}(z_0)$ - ex $\sum_0^\infty (-z)^n$) - Développements en série usuels (méthodes : TL, dérivation intégration, eq diff, relation de récurrence (identification) - ex $\frac{1}{(1-z)^{p+1}}$, $\ln(1-x)$, Arctg x - $(1+x)^\alpha$ $((1+x)y' - \alpha y = 0)$ $\to$ arcsin - fonction rationnelle ($\to$ somme de sa série de Taylor)) - Questions diverses (Pb de dénombrement ($\#\{(p,q,r) \in \mathbb{N}^3, p + 2q + 3r = n\}$ (par produit de Cauchy) - $\#\{(k_1 \dots k_p) \in \mathbb{N}^p, k_1 + \dots + k_p = n\}$) - somme de séries du type $\sum P(n) a_n z^n$, P polynôme (base de $\mathbb{C}_p[X]$ $1, X, X(X-1), \dots$ - ex équivalent en 1 de $\sum n^p z^n$) - ex DSE $(\text{Arcsin}\,.)^2$)

38 Exponentielle complexe

Généralité ($\exp z = \sum_0^\infty \frac{z^n}{n!}$ exp $(\mathbb{C}, +) \to (\mathbb{C}^*, \times)$ - déf sin, cos, sh, ch, relations trig. - dérivabilité) - Etude des fonctions sin et cos de variable réelle ($\cos x = \sum_0^\infty \frac{(-1)^n}{(2n)!} x^{2n}$, $\sin x = -\cos' x$ - $\exists$ $c = \min\{x \in \mathbb{R}_+, \cos x = 0\}$ on pose $\pi = 2c$ - périodicité) - Application (Th $y \mapsto e^{iy}$ $(\mathbb{R}, +) \to (U, \times)$ morphisme surjectif de noyau $2\pi\mathbb{Z}$ - Argument d'un nbre complexe $\neq 0$ - exp : $(\mathbb{C}/_{2\pi i \mathbb{Z}}, +) \xrightarrow{\sim} (\mathbb{C}^*, \times)$ - Définition des fonctions tg z, th z, cotg z, coth z) - Logarithme de variable complexe (détermination du log : φ $e^{\varphi(z)} = z$ - Δ connexe $(\varphi_1 - \varphi_2)(\Delta) \subset 2i\pi\mathbb{Z}$ - pas de détermination sur $\mathbb{C}^*$ - détermination principale $\ln\sqrt{x^2+y^2} + i \,\text{arctg}\,\frac{y}{x}$ - $g = \sum_0^\infty \frac{(-1)^{n-1}}{n} z^n$, $g(0) = 0$ et $e^{g(z)} = 1 + z$ - application, calcul de $\sum_1^\infty \frac{\cos n\theta}{n}$, $\sum_1^\infty \frac{\sin n\theta}{n}$ $(\ln(1 - r e^{i\theta}))$)

39 Intégration

(Intégrale de fct réglée $\mathcal{R}$ - subdivision adaptée) - Intégrale des fonctions en escalier ($\int_a^b \varphi$ - pts (Chasles - linéarité - $\|\int_a^b \varphi\| \leq \int_a^b \|\varphi\|$ - positivité) - Intégrale des fonctions réglées ((φ_n) cvgeant unif vers f $\int_a^b \varphi_n$ est de Cauchy) - Propriétés (Chasles - linéarité - décomposition sur une base lorsque E est de dim finie - $\int_a^b \|f\| \geq \|\int_a^b f\|$ $(a < b)$ - positivité - Th f $[a,b] \to \mathbb{R}_+$ C^0, $\int_a^b f = 0 \Rightarrow f = 0$ - f $[a,b] \to \mathbb{C}$ $|\int_a^b f| \leq \int_a^b |f|$ cas d'égalité - produit de fct réglée, Inégalité de Cauchy Schwartz) - Sommes de Riemann (subdivision pointée, $R(f, \sigma, \xi) \to \int_a^b f$ qd $\delta(\sigma) \to 0$ - ex $v_n = 2\left(\frac{1}{2n+1} + \frac{1}{2n+3} + \dots + \frac{1}{4n-1}\right)$) - Résultats divers ($(f_n)$ $[a,b] \to E$ cv unif. vers f $\int_a^b f_n \to \int_a^b f$, cex $f_n(x) = nx(1-x^2)^n$ - f réglée $[a,b] \to E$, ε, $\exists g$ C^∞ $\int_a^b \|f - g\| \leq \varepsilon$ - Comparaison de divers modes de conv. (cvce unif $\Rightarrow$ cv en moy quad. $\Rightarrow$ cvce en moy et cv unif. $\Rightarrow$ cv simple ex $x \to x^n$ sur $[0,1]$, $x \mapsto \sqrt{n}\, x(1-x^2)^n$ sur $[0,1]$) - Intégrale fonction d'une de ses bornes ($x \mapsto \int_a^x f(t)\,dt$ $\|f\|_\infty$-lipschitzienne - f C^0 en x_0 alors $x \mapsto \int_a^x f$ dérivable en x_0 - appl f C^0, ϕ primitive de f, $\int_a^b f = \phi(b) - \phi(a)$, encore vraie si f réglée (somme de Riemann et TAF)) - Formule de la moyenne (f $[a,b] \to \mathbb{R}$ C^0, g $[a,b] \to \mathbb{R}_+$ réglées alors $\exists c \in [a,b]$ $\int_a^b fg = f(c)\int_a^b g$ - ex étude de $x \mapsto \int_x^{x^2} \frac{dt}{\ln t}$ - 2^e formule de la moy f $[a,b] \to \mathbb{R}$ C^1 $\searrow$, g $[a,b] \to \mathbb{R}$ C^0 alors $\exists c \in [a,b]$ $\int_a^b fg = f(a)\int_a^c g$ (int. par partie)) - Changt de variable, intégration par partie (chgt de var (f C^0, φ C^1 $[\alpha, \beta] \to [a,b]$ alors $\int_\alpha^\beta (f \circ \varphi)(u)\varphi'(u)\,du = \int_{\varphi(\alpha)}^{\varphi(\beta)} f$ - f C^0 par morceaux, φ C^1 strict. monotone m̂ formule - ex f C^0 par morceau 2π périodique $\int_a^{a+2\pi} f$ indépendant de a) - intég. par partie (u, v C^1 $\int_a^b uv' = [uv]_a^b - \int_a^b u'v$ - appl formule de Taylor avec reste intégral - appl. reste de Taylor de f $x \mapsto (1+x)^\alpha$)) - Résolution de certaines eq fonctionnelles (ex f C^0 $f(x+y) = f(x) + f(y)$, $f(x+y) = f(x) + f(y) - f(x)f(y)$)

40 Calcul d'intégrales

Primitives usuelles (x^α, e^x, sin, cos, sh, ch, $\frac{1}{\cos^2 x}$, $\frac{1}{\sin^2 x}$, $\frac{1}{\text{ch}^2 x}$, $\frac{1}{\text{sh}^2 x}$, $\frac{1}{\sin x}$, $\frac{1}{\cos x}$, $\frac{1}{1+x^2}$, $\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$, $\frac{1}{\sqrt{1+x^2}}$, $\frac{1}{\sqrt{x^2-1}}$, $\frac{1}{1-x^2}$) - Méthodes générales (chgt var, integ. par partie) - Fonctions rationnelles (déc. en élts simples - $\frac{ax+b}{[(x-p)^2+q^2]^k}$ par réc - $f(x) = x^{n-1} g(x^n)$ ex $\int \frac{dx}{x(x^3+1)}$) - $\int F(\cos x, \sin x)$, $\int F(\text{ch}\,x, \text{sh}\,x)$, $F \in \mathbb{R}(X,Y)$ ($\int F(\cos x, \sin x)\,dx$ ($\int \sin^p x \cos^q x\,dx$ avec p impair - linéarisation - $t = \text{tg}\,\frac{x}{2}$ - cas $F(\cos x, \sin x)dx$ invariant par chgt x en $-x$, x en $\pi - x$, x en $x + \pi$) - $\int F(\text{ch}\,x, \text{sh}\,x)\,dx$ ($t = \text{th}(\frac{x}{2})$ - m̂ cas particulier que $F(\cos x, \sin x)dx$ - $u = e^x$) - Intégrales abéliennes ($\int f(x, \varphi(x))dx$ $f \in \mathbb{R}(X,Y)$ $\exists \psi \in \mathbb{R}(X)$ $\varphi \circ \psi \in \mathbb{R}(X)$ $\to x = \psi(t)$ - courbe unicursale $x = \psi(t)$, $y = \varphi \circ \psi(t)$ - ex $\int f\left(x, \sqrt[n]{\frac{ax+b}{cx+d}}\right)dx$ $ad - bc \neq 0$ - $\int f(x, \sqrt{ax^2+bx+c})\,dx$ (para. rationnel de la conique - para avec sin, sh, ...) - discussion suivant le signe du discriminant) - exercices)