chap 29 Fonctions monotones

(def - limites à gauche et à droite - homéo. d'intervalles de $\mathbb{R}$ - dérivée d'une fct réciproque - graphes - fonctions circulaires réciproques (arcsin - arccos - arctg) - exp et log, limites - trigonométrie hyperbolique (ch, sh - argsh - argch - argth))

30 Fonctions convexes

Définition, généralité ($f(\lambda_1 a+\lambda_2 b) \leq \lambda_1 f(a)+\lambda_2 f(b)$ - interprétation géométrique - lemme des 3 cordes) - Ptés des fonctions convexes (dérivée à gauche et à droite en un pt intérieur de I - f'_g, f'_d croissantes, position de la tangente) - Conditions suffisantes de convexité (f dérivable f convexe $\Leftrightarrow f'$ croissante - $f''^{-1}(\{0\})$ et stricte convexité) - Application (encadrement de sin - moyenne arithmétique et géométrique - Inégalité de Holder Minkowsky ($\sum a_i c_i \leq (\sum a_i^p)^{1/p}(\sum c_i^q)^{1/q}$ - $(\sum (a_i+b_i)^p)^{1/p} \leq (\sum a_i^p)^{1/p}+(\sum b_i^p)^{1/p}$ (dem $\sum a_i(a_i+b_i)^{p-1}$)))

31 Théorème des accroissements finis, th de Taylor

Théorème des acc. finis pour les appl. de I ds $\mathbb{R}$ ((extrema locaux - annulation de la dérivée) - th des accroissements finis (th de Rolle - acc. finis - th des acc. finis généralisés $\frac{f(b)-f(a)}{g(b)-g(a)}=\frac{f'(c)}{g'(c)}$) - Application ($I$ int. f der. f cte $\Leftrightarrow f'=0$, $\mathrm{arctg}\, x+\mathrm{arctg}\frac{1}{x}$ - monotonie - application aux extrema - f C^0 sur $[a,b[$ $\exists \lim_{x\to a} f'(x)=\ell \Rightarrow \exists f'_d(a)=\ell$ (récip. fausse, appl. à $x\mapsto e^{-1/x^2}$) - th de l'Hopital $\frac{f'}{g'}(x)\to\ell \Rightarrow \frac{f(x)-f(a)}{g(x)-g(a)}\to\ell$)) Th. des accroissements finis pour les appl. de I ds E evn (th fondamental (($f\ [a,b]\to E$, $g\ [a,b]\to\mathbb{R}$, $\|f'_d(t)\| \leq g'_d(t)$) - inégalité des acc. finis) - Applications ($g\ ]a,b[\to\mathbb{R}$ dér. à droite g cte $\Leftrightarrow g'_d=0$ - f C^0 $[a,b[\to E$ $\exists \lim_{\to a} f'(t) \Rightarrow \exists f'_d(a)$ - prolong^t de $f\ ]a,b[\to E$ ds le cas complet) Formule de Taylor-Lagrange pour les fct numériques - Inégalité de Taylor Lagrange pour les fct vect. de var. réelles - Théorème de Taylor-Young - Applications (dev. en série entière de e^x, $\ln(1+x)$, cos, sin - existence d'un extrema local (TY) - position locale de deux courbes)

32 Etude locale

($A\subset\bar{\mathbb{R}}$, $a\in\bar{A}$, $\mathcal{B}=\{V\cap A, V\in\mathcal{V}(a)\}$, E evn, $\mathcal{F}_{\mathcal{B}}(E)=\{$appl. d'un el^t de $\mathcal{B}$ ds $E\}$) - Comparaison des fonctions (Def $O(g)$, $o(g)$ - ptés) - Equivalence de fonctions (rel. d'équivalence $f\sim g$ si $f-g=o(g)$ - Multiplication, division, addition d'équivalents - logarithme et exponentielle d'équivalents - équivalent en 0 des fct usuelles)

33 Développements limités

(Def - lien avec les dérivées - unicité, parité - somme, produit, quotient - $\mathcal{DL}^{n+1}(0)$ de f connaissant un $\mathcal{DL}^n(0)$ de f' - pb inverse - composition - DL obtenus par TY (a^x, $\sin x$, $\cos x$, sh, ch, $(1+x)^\alpha$, $\frac{1}{1-x}$, $\mathrm{tg}\, x$, $\mathrm{th}\, x$) - DL obtenus par primitivation ($\ln(1+x)$, argth, arcsin))

34 Développements asymptotiques

(échelle de comparaison (ex $(x^k(\ln x)^{k'})_{k,k'}$) - Def dev. asymptotique, unicité - ex $(\mathrm{tg}\, x)^x$, $x^{\mathrm{tg}\, x}$, $\lim \frac{3(\sin x)\sqrt{1+x^2}-x\ln(1+x^2)-3x}{\sin^3 x-\mathrm{sh}^3 x}$ - dev asympt. de la sol. de $\mathrm{tg}\, x=x$ sur $[n\pi, n\pi+\frac{\pi}{2}[$)

35 Séries

Généralités E evn (def $((u_n),(S_n))$ - convergence - reste d'ordre n - Ptés (convergence de $\sum u_n$ indépendant des premiers termes - $\sum u_n$ cv $\Rightarrow u_n\to 0$, $\sum\frac{1}{n}$ - $\sum u_n$ et $\sum v_n$ cv $\Rightarrow \sum(u_n+\lambda v_n)$ cv, $\sum(\frac{1}{n}-\frac{1}{n+1})$ - $u_n=a_n+ib_n$) - exemples ($u_n=\lambda^n$, $u_n=\frac{1}{n(n+1)}$, $u_n=\frac{(-1)^n}{n}$ - $\sum\frac{(-1)^n}{2n+1}$) - Critère de Cauchy, convergence absolue, semi convergence (ex. E algèbre de Banach, $\sum u^n$, $\sum\frac{u^n}{n!}$)) Séries à termes réels positifs ou nuls (théorème fondamental ($u_n\in\mathbb{R}_+$ $\sum u_n$ cv $\Leftrightarrow (S_n)$ bornée - Comparaison $0\leq u_n\leq v_n$ - ($n\geq n_0 \Rightarrow u_n\in\mathbb{R}_+$ et $u_n\sim v_n$) $\Rightarrow \sum u_n$ et $\sum v_n$ de m̂ nature, $\frac{(-1)^n}{\sqrt{n}}$ et $\frac{(-1)^n}{\sqrt{n}}+\frac{1}{n}$ - $\sum v_n$ convergeante, à termes positifs $u_n\sim v_n \Rightarrow \sum_{n+1}^\infty u_k\sim\sum_{n+1}^\infty v_k$ - $v_n\geq 0$, $\sum v_n$ diverge et $u_n\sim v_n \Rightarrow \sum_0^n u_k\sim\sum_0^n v_k$ - ex $\frac{1}{n(n+1)}\sim\frac{1}{n^2}\to\frac{1}{n^\alpha}$ $\alpha\geq 2$ $\alpha\leq 1$ - $x_n=1+\frac{1}{2}+\dots+\frac{1}{n}-\ln n\to$ cte d'Euler)) - comparaison avec une intégrale ($f\ \mathbb{R}_+\to\mathbb{R}_+$ décroissante, $\sum f(n)$ et $\int_0^{+\infty} f(t)\,dt$ de m̂ nature - applications (série de Riemann $\sum\frac{1}{n^\alpha}$ - Règle de Riemann "$n^\alpha u_n$", ex $u_n=(\cos\frac{1}{\log n})^{\sqrt{n}}$ - Série de Bertrand $\sum\frac{1}{n^\alpha(\ln n)^\beta}$)) - Règles de Cauchy - d'Alembert - Duhamel ($u_n\geq 0$ $\lim\sqrt[n]{u_n}<1 \Rightarrow \sum u_n$ cv, $>1 \Rightarrow \sum u_n$ div., $\frac{1}{n^\alpha}\to 1$ - $u_n, v_n>0$ $n\geq n_0 \Rightarrow \frac{u_{n+1}}{u_n}\leq\frac{v_{n+1}}{v_n}$ alors $\sum v_n$ cv $\Rightarrow \sum u_n$ cv. - règle de d'Alembert $\lim\frac{u_{n+1}}{u_n}$ - Cauchy > d'Alembert (cesaro) $\frac{2+(-1)^n}{2^n}$ - Règle de Duhamel ($\frac{u_{n+1}}{u_n}=1-\frac{\beta}{n}+o(\frac{1}{n})$, $\beta>1 \Rightarrow$ cv, $\beta<1 \Rightarrow$ dv, $\beta=1$ et DL d'ordre 2 $\Rightarrow$ cv ($v_n=\frac{1}{n^\alpha}$ $\frac{v_{n+1}}{v_n}=1-\frac{\alpha}{n}+o(\frac{1}{n})$, $\frac{1}{n+a}$) - ex $u_n=\frac{1\cdot 3\cdots 2n-1}{2\cdot 4\cdots 2n}$ - $\frac{u_{n+1}}{u_n}=1-\frac{\lambda}{n}+v_n$ $\sum v_n$ abs conv alors $\exists A>0$ $u_n\sim\frac{A}{n^\lambda}$))) - Séries à termes quelconques (d'abord $\sum\|u_n\|$ - théorème des séries alternées ($u_n=(-1)^n|u_n|$), $|u_n|\searrow$ - R_n du signe de u_{n+1} et $|R_n|\leq|u_{n+1}|$ - ex $\frac{(-1)^n}{n^\alpha}$) - transformation d'Abel ($\sum\varepsilon_n u_n$, $u_n\in E$ evn $u_n=S_n-S_{n-1}$ ou $u_n=\sigma_{pn}-\sigma_{p\,n-1}$ pour $n\geq p+1$ où $\sigma_{pq}=\sum_{p+1}^q u_k$ - th $\varepsilon_n\in\mathbb{R}_+$, $\varepsilon_n\searrow 0$, S_n borné $\Rightarrow \sum\varepsilon_n u_n$ cv - $(\varepsilon_n)\to 0$, $\sum|\varepsilon_{n+1}-\varepsilon_n|$ cv, S_n borné - E banach, $\varepsilon_n\in\mathbb{R}_+$ $\varepsilon_n\searrow$ et $\sum u_n$ cv - application $\sum\frac{e^{in\theta}}{n^\alpha}$) - Groupement de termes ($\varphi\ \mathbb{N}\nearrow\mathbb{N}$, $v_p=S_{\varphi(p)}-S_{\varphi(p-1)}$ - th $\sum u_n$ cv $\Rightarrow \sum v_n$ cv, réciproque si $u_n\in\mathbb{R}$ garde un signe cst sur les paquets ou $(u_n)\to 0$ et $(\varphi(p)-\varphi(p-1))$ bornée) - Développement asymptotique du terme général (ex $u_n=\ln(1+\frac{(-1)^n}{n^\alpha})$ $\alpha>0$, $u_n=(-1)^n n^\alpha\sin\frac{1}{n^2}$ $(n^\beta+(-1)^n)^{-1}$ $\alpha,\beta>0$) - Produit de Cauchy de deux séries ($\sum u_n$, $\sum v_n$ $w_n=\sum_{p+q=n} u_p v_q$ (E algèbre de Banach) - th $\sum u_n$, $\sum v_n$ absolument cvte $\Rightarrow \sum w_n$ AC - appl. si u et v commutent $e^{u+v}=e^u e^v$) - Autres propriétés (Règle de Weierstrass ($a_{np}\in E$ Banach $\sum_n a_{np}$ cv, $\exists\lim_p a_{np}=\ell_n$ - ex $a_{np}=\frac{p}{(n+p)^2}$ - si $\exists(\alpha_n)\in\mathbb{R}_+^{\mathbb{N}}$ $\|a_{np}\|\leq\alpha_n$ et $\sum\alpha_n$ cv. alors $\sum\ell_n$ est AC et $\lim_{p\to\infty}\sum_{n=0}^\infty a_{np}=\sum_{n=0}^\infty\ell_n$ - appl. A alg. de Banach $(1+\frac{u}{p})^p\to e^u$) - Séries doubles, interversion des sommations ($a_{n,p}\in E$ evn $\sum_{n=0}^\infty(\sum_{p=0}^\infty a_{np})$ a un sens - ex $a_{np}=\frac{1}{n^2-p^2}$, $a_{nn}=0$ $\sum_{n=0}^\infty(\sum_{p=0}^\infty a_{np})=-\frac{\pi^2}{8}$ - th si $\sum_{n=0}^\infty\sum_{p=0}^\infty\|a_{np}\|$ existe, alors $\sum_{n=0}^\infty(\sum_{p=0}^\infty a_{n,p})$ et $\sum_{p=0}^\infty(\sum_{n=0}^\infty a_{n,p})$ existent et sont égales - ex $\sum_{n=1}^\infty\frac{3^n}{1-3^{2n}}=\sum_{n=0}^\infty\frac{3^{2n+1}}{1-3^{2n+1}}$)

36 Suites et séries de fonctions

Généralités sur les suites de fonctions (E qcq, F métrique $f_n: E\to F$ - convergence simple et uniforme (ex $[0,1]\to\mathbb{R}$ $x\mapsto x^n$) - exemples f C^0 $[a,b]\to\mathbb{R}$ est limite unif. de fonct. poly., d'appl affine par morceaux - pseudo distance de la conv. uniforme $\delta(f,g)=\sup_E d(f(x),g(x))$ - Critère de Cauchy pour la convergence uniforme (C + cv. simple $\Rightarrow$ cv unif)) - Propriétés conservées par convergence uniforme (fonctions bornées - si F complet, $(B(E,F),\delta)$ complet) - fonctions continues, limites ($(f_n)\xrightarrow{\text{unif}} f$ f_n C^0 en $x_0 \Rightarrow f$ C^0 en x_0 - $\mathcal{E}B(E,F)$ est complet-