chap. 11 Espaces compacts

Généralités (def - prop (F_n) suite décroissante de fermés non vides $\Rightarrow \cap F_n \neq \emptyset$ - compacité d'une partie de E - E top séparée X compact $\Rightarrow X$ fermé, X fermé de E compact $\Rightarrow X$ compact, 2 parties disjointes compactes d'un esp. séparé sont séparés) - Propriétés des suites dans un espace compact (Ttes suite de pt de E admet une valeur d'adh - th de Bolzano Weierstrass ((E,d) métrique) - esp. métriques produits) - Compacts de $\mathbb{R}, \mathbb{R}^n, \mathbb{C}, \mathbb{C}^n$ (parties fermées bornées) - Propriétés des fonctions continues sur un compact (Image continue d'un compact - appl aux fonctions numériques, distance d'un pt à une partie - th de Heine)

12 Espaces connexes

Généralités (def - f C^0 $E \to F$ surjective alors E connexe $\Rightarrow F$ connexe - E connexe $\Leftrightarrow \forall f \in C^0(E,\{0,1\})$ f est cte - A_i famille de pts connexes ayant un pt commun alors $\cup A_i$ est connexe - si A connexe $\forall B$ tq $A \subset B \subset \bar{A}$ B connexe) - Parties connexes de $\mathbb{R}$ (I connexe $\Leftrightarrow I$ intervalle - th des valeurs intermédiaires) - composantes connexes (les $C(x)$ forment une partition de E appl. aux ouverts de $\mathbb{R}$) - Espaces connexes par arc

13 Espaces vectoriels normés

Généralité (def d'une norme - ex - distance associée à une norme - $\begin{matrix} E^2 \to E \\ (x,y) \to x+y \end{matrix}$, $\begin{matrix} \mathbb{K} \times E \to E \\ (\lambda, x) \to \lambda x \end{matrix}$) - Normes équivalentes (def - ex - th fondamentale (dim finie) : toutes les normes sont équivalentes) - f isom de E dans E' de dim finie alors f est lipschitzienne - E evn de dim fini alors E est complet - parties compactes de E) - Application linéaire continue (u bornée sur la sphère unité $\Leftrightarrow u$ lipschitzienne - th E de dim finie alors $L(E) = L'(E)$ - $f \in E^*$ ker qcq f $C^0 \Leftrightarrow$ ker f est fermé - Etude de $L'(E,F)$ (def de $|||\cdot|||$ - si F est complet $L'(E,F)$ aussi) - Application multilinéaires continues (u $C^0 \Leftrightarrow u$ bornée sur le produit des sphères unités $\exists M \in \mathbb{R}_+$ $\|u(x_1,\dots,x_n)\|_F \leq M \|x_1\|_{E_1} \cdots \|x_n\|_{E_n}$ - u n linéaire $n \geq 2$ C^0 $u \neq 0$ alors u n'est pas unif^t C^0 - cas de la dim. finie - def de $|||\cdot|||$) - Parties convexes et connexes d'un evn (def convexité - caract. des ouverts connexes d'un evn par les lignes polygonales) - th de Riesz (E de dim finie ssi $B(0,1)$ est compacte)

14 Espaces vectoriels

(structure de $L(E,F)$, $L(E)$, $GL(E)$ (factorisation canonique d'une application linéaire (espace quotient)) - sous espaces supplémentaires, somme directe (def - caract. - relation avec les projecteurs ($\begin{matrix} p+q = Id \\ pq = qp = 0 \end{matrix}$) - cas de n ss espaces - définition d'une application sur une somme directe - prolong^t des appl. linéaires) - Factorisation d'une application linéaire à travers une autre - Familles libres, génératrices, bases (def familles, support - partie libre, génératrice, basique - caract. des parties basiques - def. d'une application linéaire par 2 bases) - Espace vectoriel de dimension finie (def dimension - dim. d'un ss espace - rang d'une famille de vecteurs - dim. d'une somme - dim d'un quotient - dim d'un produit - Appl. linéaire en dim. finie (dim $L(E,F)$ - suite des noyaux et des images dérivés d'un endomorphisme)))

15 Algèbres

(definition - ex $L(E)$, $\mathbb{K}[X]$, $\mathbb{K}^X$ - ss algèbre - morphisme - algèbre d'un monoïde (G muni d'une loi. associative, $\exists 1 \in G$ unité $\mathbb{K}^{(G)}$ est un $\mathbb{K}$ ev base canonique $(\delta_g)_{g \in G}$ On définit une loi par $\delta_g \delta_h = \delta_{gh}$ + bilinéarité - appl $G = (\mathbb{N}^p, +)$) - Algèbre des quaternions)

16 Dualité

Espace dual, bidual (def - formes linéaires ex, Ptés (relation avec les hyperplans - $(f_1,\dots,f_p,f) \in E^{*p+1}$ $f \in \mathrm{Vect}(f_1,\dots,f_p)$ ssi $\bigcap_{i=1}^{p} \ker f_i \subset \ker f$) - dual ($(e_i^*)$ où (e_i) est base de E) - Bidual (Θ $x \to \tilde{x} : \begin{matrix} E^* \to \mathbb{K} \\ f \to f(x) \end{matrix}$ Θ injective, isomorphisme canonique en dim finie)) - Orthogonalité ($\begin{matrix} E \times E^* \to \mathbb{K} \\ (x,f) \to \langle x,f \rangle = f(x) \end{matrix}$ bilinéaire - def $X^\perp = \{f \in E^* \ \forall x \in X \ f(x) = 0\}$, $F^\circ = \{x \in E, \forall f \in F \ f(x) = 0\}$ Ptés de $X^\perp$ et F° - cas de la dimension finie (dim E = dim E' + dim $E'^\perp$ si E' sev de E) - equation d'un ss espace) - Transposition ($u \in L(E,F)$ ${}^t u$ $\begin{matrix} F^* \to E^* \\ f \to f \circ u \end{matrix}$ - Ptés - cas de la dim finie (E' sev E E' stable par $u \in L(E) \Leftrightarrow E'^\perp$ stable par ${}^t u$))

17 Matrice

Généralités (def). Matrice d'une application linéaire ($\mathrm{Mat}(u/(e_j)(f_i)) = (f_i^*(u(e_j)))$ - Ess projecteur, el^t nilpotent de $L(E)$ - caract. de $\mathrm{Mat}\ u/(e_i)(f_j)$ $Y = MX$) - Espace vectoriel $M_{np}(\mathbb{K})$ ($E_{kl} = (\delta_{ik}\delta_{jl})$ - ss espaces remarquables de $M_n(\mathbb{K})$) - Produit (Algèbre $M_n(\mathbb{K})$ - Groupe linéaire $GL_n(\mathbb{K})$ - centre de $M_n(\mathbb{K})$ - produit par blocs) - transposition - changement de bases ($P_{(e_j)}^{(e'_j)} = \mathrm{Mat}\ Id/(e'_j)(e_i)$ - appl. aux endomorphisme) - Matrices equivalentes, Matrices semblables - Rang d'une matrice (def - A et B sont equivalentes ssi elles ont m̂ rang - appl idéaux bilatère de $M_n(\mathbb{K})$) - trace d'une matrice (Ptés trace d'un el^t de $L(E)$ - $\alpha \in M_n(\mathbb{K})^*$ $\exists! A$ $\forall M \in M_n(\mathbb{K})$ $\alpha(M) = \mathrm{tr}(AM)$ - $\alpha \in M_n(\mathbb{K})^*$ si $\forall (M,N)$ $\alpha(MN) = \alpha(NM)$ alors $\exists \lambda \in \mathbb{K}$ $\alpha = \lambda\, \mathrm{tr}$)

18 Groupe symétrique

Généralité (def cycles - permutations disjointes) - th de décomposition - Parité (signature)

19 Déterminant

Généralité (application linéaire symétrique, antisymétrique, alternée) - Déterminant ($\mathcal{A}_n(E,\mathbb{K})$ ker des formes n linéaires alternées sur E^n est de dim 1 lorsque dim $E = n$ - def $\det_{(e_i)}$ - appl aux familles de vecteurs, matrices) - Règles de calcul (det d'un produit - developpement suivant une rangée - calcul par blocs) - application ($\tilde{A} = {}^t(\Delta_{ij})$ $\tilde{A}A = A\tilde{A} = \det A\, I_n$ - ptés de $\tilde{A}$ ($\mathrm{rg}\,\tilde{A}$, $\det \tilde{A}$, $\tilde{\tilde{A}}$, $\widetilde{AB}$) - appl. au calcul du rang d'une matrice)

20 Système d'équations linéaires

Généralités ($AX = B$ def rg du syst., syst homogène) - cas des syst. de Cramer (A inversible - Formules de Cramer $\frac{\det A_i}{\det A}$) - Cas général (eq principales, inc principales - cas $n = r \leq p$ - cas $r < n$ caractéristiques - th de Rouché Fontenay)