

composition de mathématiques générales

Durée : 6 heures

Les candidats composeront sur du papier de composition quadrillé 5×5 .

Tout document est interdit.

Calculatrice électronique de poche — y compris calculatrice programmable et alphanumérique — à fonctionnement autonome, non imprimante, autorisée conformément à la circulaire n° 86-228 du 28 juillet 1986. La clarté et la précision de la rédaction seront prises en compte dans l'appréciation de la copie.

DÉFINITIONS ET NOTATIONS

Dans tout le problème k désigne un corps commutatif. Les termes “espace vectoriel”, “application (bi)linéaire” et “forme linéaire” signifient respectivement “ k -espace vectoriel”, “application k -(bi)linéaire” et “forme k -linéaire”.

1. Une algèbre est un espace vectoriel A muni d'une application bilinéaire (appelée le produit) $(a, b) \mapsto ab$ de $A \times A$ dans A vérifiant les deux hypothèses suivantes :

(i) le produit induit une structure d'anneau sur A ,

(ii) si $\lambda \in k$ et $a, b \in A$, on a : $\lambda(ab) = (\lambda a)b = a(\lambda b)$.

Nous supposons que, de même qu'un anneau, une algèbre a toujours une unité notée 1.

Un morphisme d'algèbres $f : A \rightarrow B$ de l'algèbre A dans l'algèbre B est une application linéaire telle que $f(1) = 1$ et $f(aa') = f(a)f(a')$ pour tout couple (a, a') d'éléments de A . Un sous-espace vectoriel A' d'une algèbre A est une sous-algèbre de A si l'unité 1 de A appartient à A' et si $a, a' \in A'$ implique $aa' \in A'$.

2. Si A est une algèbre, la multiplication des matrices induit une structure d'algèbre sur l'espace vectoriel $M_n(A)$ des matrices carrées de taille $n \times n$ à coefficients dans A ($n \geq 1$). Si a est un élément de A et i et j sont deux entiers vérifiant $1 \leq i \leq n$ et $1 \leq j \leq n$, on désigne par $E_{ij}(a)$ la matrice carrée de $M_n(A)$ dont tous les coefficients

sont nuls à l'exception du coefficient situé sur la i -ème ligne et dans la j -ème colonne, coefficient qui est égal à a . Le produit dans $M_n(A)$ des matrices $E_{ij}(a)$ et $E_{kl}(a')$ vaut :

$$E_{ij}(a)E_{kl}(a') = \delta_{jk} E_{il}(aa')$$

où δ_{jk} est le symbole de Kronecker : $\delta_{jj} = 1$ et $\delta_{jk} = 0$ si $j \neq k$.

On définit la *trace* $\text{Tr}(m)$ d'une matrice m de $M_n(A)$ comme la somme dans A de ses coefficients diagonaux.

Soit V un espace vectoriel de dimension finie sur k et f un endomorphisme k -linéaire de V . On admet qu'il existe un élément bien défini $\text{Tr}(f)$ de k égal pour toute base de V à la trace de la matrice représentant f dans cette base. On appelle $\text{Tr}(f)$ la *trace de l'endomorphisme* f .

3. Soit A une algèbre et V un espace vectoriel. On appelle *trace sur* A à valeurs dans V toute application linéaire τ de A dans V telle que $\tau(aa') = \tau(a'a)$ pour tout couple (a, a') d'éléments de A . Les traces sur A à valeurs dans V forment un espace vectoriel noté $T(A, V)$.

4. (a) Dans toute algèbre A on définit le *commutateur* $[a, a']$ de deux éléments a et a' de A par :

$$[a, a'] = aa' - a'a.$$

On désigne par $[A, A]$ le sous-espace vectoriel de A engendré par tous les commutateurs $[a, a']$ où a et a' parcourent A .

(b) Si A est une algèbre, on désigne par $H_0(A)$ l'espace vectoriel quotient $H_0(A) = A/[A, A]$. On note T l'application linéaire surjective canonique de l'espace vectoriel A sur son quotient $H_0(A)$; celle-ci associe à l'élément a de A sa classe modulo $[A, A]$.

Comme il est d'usage, les lettres \mathbf{N} , \mathbf{Z} et \mathbf{Q} désignent successivement le monoïde des entiers naturels, l'anneau des entiers relatifs et le corps des nombres rationnels.

PARTIE I : L'ESPACE VECTORIEL $H_0(A)$

A. PRÉLIMINAIRES

Soit A une algèbre.

1. Montrer que la projection canonique $T : A \rightarrow H_0(A)$ est une trace sur A .
2. Soit $\tau : A \rightarrow V$ une trace sur A à valeurs dans un espace vectoriel V . Montrer qu'il existe une unique application linéaire $\bar{\tau} : H_0(A) \rightarrow V$ telle que $\bar{\tau}(T(a)) = \tau(a)$ pour tout $a \in A$. En déduire que $T(A, V)$ est isomorphe à l'espace vectoriel des applications linéaires de $H_0(A)$ dans V .
3. (a) Soit $f : A \rightarrow B$ un morphisme d'algèbres. Montrer qu'il existe une unique application linéaire $H_0(f)$ de $H_0(A)$ dans $H_0(B)$ telle que

$$H_0(f) \circ T = T \circ f.$$

- (b) Soit u un élément inversible de l'algèbre A et f l'endomorphisme d'algèbre de A donné par $f(a) = uau^{-1}$. Démontrer que $H_0(f)$ est l'application identité de $H_0(A)$.

B. LES ALGÈBRES DE MATRICES.

On se donne une algèbre A et un entier $n \geq 2$.

1. Montrer que $T \circ \text{Tr}$ est une trace de $M_n(A)$ vers $H_0(A)$.
2. (a) Calculer dans $M_n(A)$ le commutateur $[E_{ij}(a), E_{kl}(b)]$ pour a et b dans A .
 (b) On pose : $F_i(a) = E_{ii}(a) - E_{11}(a)$ ($i \geq 1$). Montrer que $F_i(a)$ peut s'écrire sous la forme d'un commutateur de $M_n(A)$.
 (c) Etablir que toute matrice $m = (m_{ij})_{1 \leq i \leq n, 1 \leq j \leq n}$ de $M_n(A)$ s'écrit de manière unique sous la forme

$$m = \sum_{1 \leq i \neq j \leq n} E_{ij}(m_{ij}) + \sum_{2 \leq i \leq n} F_i(m_{ii}) + E_{11}(\text{Tr}(m)).$$

- (d) On note $M'_n(A)$ le noyau de l'application linéaire $T \circ \text{Tr}$ de $M_n(A)$ dans $H_0(A)$. Etablir que $M'_n(A)$ est un sous-espace vectoriel de $[M_n(A), M_n(A)]$.
- (e) Montrer que l'application $\overline{T \circ \text{Tr}}$ de $H_0(M_n(A))$ dans $H_0(A)$ est un isomorphisme pour tout entier $n \geq 2$.

C. L'ALGÈBRE D'UN GROUPE FINI.

On désigne par G un groupe fini noté multiplicativement, d'unité e et de cardinal N . On note aussi $k[G]$ l'espace vectoriel des fonctions de G à valeurs dans k . A chaque élément g de G on associe la fonction χ_g de $k[G]$ définie par $\chi_g(g) = 1$ et $\chi_g(h) = 0$ si $h \neq g$.

1. Montrer que si $f \in k[G]$, alors on a :

$$f = \sum_{g \in G} f(g) \chi_g$$

et que la famille $\{\chi_g\}_{g \in G}$ forme une base de l'espace vectoriel $k[G]$.

2. On munit $k[G]$ de la loi de composition $(f, f') \mapsto ff'$ où ff' est appelé le *produit de convolution* de f et de f' et est défini pour tout g de G par

$$(ff')(g) = \sum_{h \in G} f(h)f'(h^{-1}g).$$

(On ne confondra pas le produit de convolution avec le produit usuel des fonctions qui n'est pas utilisé dans ce problème). Calculer $\chi_g \chi_{g'}$ et montrer que le produit de convolution munit $k[G]$ d'une structure d'algèbre dont l'unité est χ_e .

3. On rappelle que les éléments g et g' du groupe G sont *conjugués* s'il existe h dans G tel que $g' = hgh^{-1}$. La conjugaison est une relation d'équivalence. Soit C une classe de conjugaison de G . Pour toute fonction f de $k[G]$ on pose :

$$T_C(f) = \sum_{g \in C} f(g).$$

Montrer que T_C est une trace sur l'algèbre $k[G]$.

4. (a) Montrer que pour toute forme linéaire α sur $k[G]$, il existe une fonction a de $k[G]$ telle que pour toute fonction f on ait :

$$\alpha(f) = \sum_{g \in G} a(g)f(g).$$

- (b) En déduire que toute trace de $k[G]$ à valeurs dans k est combinaison linéaire de traces de la forme T_C .
5. Etablir que la famille $\{T_C\}$ (où C parcourt l'ensemble des classes de conjugaison de G) forme une base de l'espace vectoriel $T(k[G], k)$ et que la famille $\{\overline{T_C}\}$ forme une base de l'espace vectoriel dual de $H_0(k[G])$.
6. Calculer la dimension de l'espace vectoriel $H_0(k[S_4])$ où S_4 est le groupe symétrique d'ordre quatre.

PARTIE II : INDÉCOMPOSABILITÉ DE $\mathbf{Z}[G]$

A. IDEMPOTENTS.

Soit A_1 et A_2 deux anneaux. On munit l'ensemble $A_1 \times A_2$ d'une structure d'anneau en posant :

$$(a_1, a_2) + (b_1, b_2) = (a_1 + b_1, a_2 + b_2)$$

$$(a_1, a_2)(b_1, b_2) = (a_1 b_1, a_2 b_2).$$

On dit qu'un anneau A est *indécomposable* s'il n'existe aucun isomorphisme d'anneaux de A sur $A_1 \times A_2$ où A_1 et A_2 sont des anneaux tous deux différents de $\{0\}$.

Un élément e de A est dit *idempotent* si $e^2 = e$. On note $P(A)$ l'ensemble des idempotents de A . On dit que $e, f \in P(A)$ sont *orthogonaux* si $ef = fe = 0$.

1. Etablir que

(a) si e et f sont des idempotents orthogonaux de A , alors $e + f \in P(A)$;

(b) si $e \in P(A)$, alors $1 - e$ est un idempotent et e et $1 - e$ sont orthogonaux.

2. Soit A un anneau tel qu'il existe une application $r : P(A) \rightarrow \mathbf{N}$ vérifiant les trois propriétés:

$$(R1) \quad r(1) = 1 \text{ et } r(0) = 0,$$

(R2) $r(e) > 0$ si et seulement si $e \neq 0$,

(R3) $r(e + f) = r(e) + r(f)$ si e et f sont des idempotents orthogonaux.

Sous ces hypothèses montrer que les seuls idempotents de A sont 0 et 1.

3. Montrer que si les seuls idempotents de A sont 0 et 1, alors A est indécomposable.

4. Montrer que si e est une matrice idempotente de $M_n(k)$, alors le rang $\text{rg}(e)$ de la matrice e est lié à sa trace par :

$$\text{rg}(e)1 = \text{Tr}(e)$$

où 1 est l'unité du corps commutatif k .

B. INDÉCOMPOSABILITÉ.

On reprend les notations de I.C. On suppose jusqu'à la fin de cette partie que k est le corps \mathbf{Q} des nombres rationnels. On définit $\mathbf{Z}[G]$ comme le sous-groupe de $\mathbf{Q}[G]$ des combinaisons linéaires à coefficients entiers des éléments χ_g où g parcourt G . On définit aussi une application $\tau : \mathbf{Z}[G] \rightarrow \mathbf{Z}$ par

$$\tau\left(\sum_{g \in G} n(g)\chi_g\right) = n(e)$$

où e est l'unité de G . On rappelle que N désigne le cardinal du groupe fini G .

1. Montrer que le produit défini en I.C.2 sur $\mathbf{Q}[G]$ fait de $\mathbf{Z}[G]$ un sous-anneau de $\mathbf{Q}[G]$.

2. Soit x un élément de $\mathbf{Z}[G]$. On lui fait correspondre l'endomorphisme linéaire \tilde{x} du \mathbf{Q} -espace vectoriel $V = \mathbf{Q}[G]$ défini par $\tilde{x}(y) = xy$ pour tout y dans $\mathbf{Q}[G]$. Montrer que la trace de cet endomorphisme est donnée par :

$$\text{Tr}(\tilde{x}) = N \tau(x).$$

3. Montrer que la restriction de τ à $P(\mathbf{Z}[G])$ est à valeurs dans \mathbf{N} et vérifie les propriétés (R1), (R2) et (R3) décrites plus haut. En déduire que l'anneau $\mathbf{Z}[G]$ est indécomposable.

PARTIE III : L'ESPACE VECTORIEL $H_1(A)$

Soit A une algèbre. On considère l'espace vectoriel F_A des applications ensemblistes de l'ensemble $A \times A$ dans k . Pour tout couple (a, b) de $A \times A$ on note $X(a, b)$ la fonction qui vaut 1 sur le couple (a, b) et 0 sur tout autre couple. La famille libre $\{X(a, b)\}_{(a, b) \in A \times A}$ engendre un sous-espace vectoriel X_A de F_A . Soit Y_A le sous-espace vectoriel de X_A engendré par les éléments

$$\alpha(a, b) = X(a, b) + X(b, a)$$

$$\beta(a, b, c) = X(ab, c) - X(a, bc) + X(ca, b)$$

$$\gamma(a, b, \lambda) = X(\lambda a, b) - \lambda X(a, b)$$

et

$$\delta(a, b, c) = X(a + b, c) - X(a, c) - X(b, c)$$

où a, b, c parcourent A et λ parcourt k .

On note $C(A)$ l'espace vectoriel quotient $C(A) = X_A/Y_A$. L'image de $X(a, b)$ dans $C(A)$ est notée $a \wedge b$.

1. Montrer que tout élément de $C(A)$ s'écrit sous la forme :

$$\sum_{i=1}^n a_i \wedge b_i$$

où $a_1, \dots, a_n, b_1, \dots, b_n$ sont des éléments de A .

2. Etablir dans $C(A)$ les relations :

$$a \wedge b = -b \wedge a$$

$$a \wedge bc = ab \wedge c + ca \wedge b$$

et

$$1 \wedge a = a \wedge 1 = 0.$$

3. Soit V un espace vectoriel et f une application k -bilineaire de $A \times A$ dans V vérifiant les relations :

$$f(a, b) + f(b, a) = 0 \quad \text{et} \quad f(a, bc) = f(ab, c) + f(ca, b)$$

pour tout $a, b, c \in A$. Montrer qu'il existe une unique application linéaire $\hat{f} : C(A) \rightarrow V$ telle que pour tout couple (a, b) d'éléments de A on a :

$$\hat{f}(a \wedge b) = f(a, b).$$

4. (a) Etablir qu'il existe une unique application linéaire $\theta_A : C(A) \rightarrow A$ vérifiant $\theta_A(a \wedge b) = [a, b]$ pour tout couple $(a, b) \in A^2$. On rappelle que $[a, b] = ab - ba$.

(b) Déterminer l'espace vectoriel quotient $A/\theta_A(C(A))$.

On définit l'espace vectoriel $H_1(A)$ comme le noyau de $\theta_A : C(A) \rightarrow A$.

5. On considère l'application bilinéaire Tr' de $M_p(A) \times M_p(A)$ dans $C(A)$ définie par

$$\text{Tr}'(m, n) = \sum_{i,j=1}^p m_{ij} \wedge n_{ji}$$

où $m = (m_{ij})_{ij}$ et $n = (n_{ij})_{ij}$ sont des matrices de $M_p(A)$.

- (a) Calculer $\text{Tr}'(E_{ij}(a), E_{kl}(b))$ pour les matrices introduites au début du problème.
- (b) Montrer qu'il existe une application linéaire et une seule $\widehat{\text{Tr}}'$ de $C(M_p(A))$ dans $C(A)$ telle que $\widehat{\text{Tr}}'(m \wedge n) = \text{Tr}'(m, n)$ ($m, n \in M_p(A)$).
- (c) Etablir la relation : $\theta_A \circ \widehat{\text{Tr}}' = \text{Tr} \circ \theta_{M_p(A)}$ où Tr désigne la trace de $M_p(A)$ dans A . En déduire que la restriction Tr_1 de $\widehat{\text{Tr}}'$ à $H_1(M_p(A))$ est à valeurs dans $H_1(A)$.
- (d) Montrer que $\text{Tr}_1 : H_1(M_p(A)) \rightarrow H_1(A)$ est surjective.

6. Considérons l'espace vectoriel $k[t, t^{-1}]$ des séries $\sum_{n \in \mathbf{Z}} \lambda_n t^n$ où $(\lambda_n)_{n \in \mathbf{Z}}$ est une suite indexée par \mathbf{Z} d'éléments de k tous nuls sauf un nombre fini d'entre eux. On admettra que le produit

$$\left(\sum_{n \in \mathbf{Z}} \lambda_n t^n \right) \left(\sum_{n \in \mathbf{Z}} \mu_n t^n \right) = \sum_{n \in \mathbf{Z}} \left(\sum_{i+j=n} \lambda_i \mu_j \right) t^n$$

munit $k[t, t^{-1}]$ d'une structure d'algèbre d'unité $t^0 = 1$. Pour tout élément $P = \sum_{n \in \mathbf{Z}} \lambda_n t^n$, on pose :

$$P' = \sum_{n \in \mathbf{Z}} (n+1) \lambda_{n+1} t^n \quad \text{et} \quad \text{res}(P) = \lambda_{-1}.$$

(a) Vérifier que pour tout $P \in k[t, t^{-1}]$ on a :

$$(PQ)' = P'Q + PQ' \quad \text{et} \quad \text{res}(P') = 0.$$

(b) Etablir qu'il existe une forme linéaire Res sur $C(k[t, t^{-1}])$ et une seule telle que pour tout couple (P, Q) d'éléments de $k[t, t^{-1}]$ on a :

$$\text{Res}(P \wedge Q) = \text{res}(PQ').$$

(c) Montrer que si $n \in \mathbf{Z}$ et $P \in k[t, t^{-1}]$, on a les relations :

$$P \wedge t^n = n P t^{n-1} \wedge t$$

dans $C(k[t, t^{-1}])$ (on pourra commencer par traiter le cas $n \geq 0$). En déduire les relations (pour $P, Q \in k[t, t^{-1}]$) :

$$P \wedge Q = PQ' \wedge t = -QP' \wedge t$$

et

$$P' \wedge t = 0.$$

(d) Etablir que la restriction de Res à $H_1(k[t, t^{-1}])$ est un isomorphisme de $H_1(k[t, t^{-1}])$ sur k lorsque k est un corps de caractéristique nulle.

PARTIE IV : EXTENSIONS

On suppose jusqu'à la fin du problème que le corps commutatif k est de caractéristique nulle.

A. GÉNÉRALITÉS.

Soit U un espace vectoriel. On appelle *crochet* sur U toute application k -bilinéaire \langle , \rangle de $U \times U$ dans U vérifiant pour tous $u, v, w \in U$ les deux conditions :

$$(L1) \quad \langle u, v \rangle + \langle v, u \rangle = 0$$

$$(L2) \quad \langle u, \langle v, w \rangle \rangle + \langle v, \langle w, u \rangle \rangle + \langle w, \langle u, v \rangle \rangle = 0.$$

On appelle ℓ -espace tout couple $L = (U, \langle , \rangle)$ où \langle , \rangle est un crochet sur l'espace vectoriel U . Soit $L' = (U', \langle , \rangle')$ un autre ℓ -espace. Un ℓ -morphisme de L dans L' est une application linéaire $f : U \rightarrow U'$ vérifiant $\langle f(u), f(v) \rangle' = f(\langle u, v \rangle)$ pour tous u, v dans U .

Soit E un espace vectoriel. On appelle *cocycle* sur le ℓ -espace $L = (U, \langle , \rangle)$ à valeurs dans E toute application bilinéaire α de $U \times U$ dans E vérifiant pour tous $u, v, w \in U$ les deux conditions :

$$(C1) \quad \alpha(u, v) + \alpha(v, u) = 0$$

$$(C2) \quad \alpha(u, \langle v, w \rangle) + \alpha(v, \langle w, u \rangle) + \alpha(w, \langle u, v \rangle) = 0.$$

Avec ces données considérons l'application bilinéaire $\{ , \}$ de $(U \times E) \times (U \times E)$ dans $U \times E$ définie par

$$\{(u, x), (v, y)\} = (\langle u, v \rangle, \alpha(u, v))$$

où $u, v \in U$ et $x, y \in E$.

1. (a) Montrer que l'application bilinéaire $\{ , \}$ ainsi définie vérifie les conditions (L1) et (L2). On note $L(\alpha)$ le ℓ -espace $(U \times E, \{ , \})$ ainsi obtenu : $L(\alpha)$ est appelé l'extension de L par le cocycle α .
 - (b) Soit p la projection canonique de $U \times E$ sur U . Montrer que p est un ℓ -morphisme de $L(\alpha)$ sur L .
 - (c) Montrer qu'il existe un ℓ -morphisme $s : L \rightarrow L(\alpha)$ tel que $p \circ s = \text{id}_L$ si et seulement si il existe une application linéaire $f : U \rightarrow E$ telle que $\alpha(u, v) = f(\langle u, v \rangle)$ pour tous u, v dans U . Si une telle application existe, on dira que l'extension $L(\alpha)$ est *triviale*.
2. On reprend les notations de la partie III. Soit A une algèbre.
 - (a) Montrer que l'application "commutateur" $[,]$ de $A \times A$ dans A vérifie les conditions (L1) et (L2). On note $L(A)$ le ℓ -espace $(A, [,])$.
 - (b) Soit φ une application linéaire de $C(A)$ dans un espace vectoriel E . Montrer que l'application bilinéaire $\alpha_\varphi : A \times A \rightarrow E$ définie par $\alpha_\varphi(a, b) = \varphi(a \wedge b)$ est un cocycle sur $L(A)$ à valeurs dans E .
 - (c) Montrer que l'extension $L(A)(\alpha_\varphi)$ est triviale si et seulement si la restriction de φ à $H_1(A)$ est nulle.