

# écrit

## MATHÉMATIQUES GÉNÉRALES

DURÉE : 6 heures

### RAPPELS

On rappelle que, pour  $n$  et  $k$  entiers naturels,

$$\binom{n}{k} = \frac{n!}{k!(n-k)!}$$

et que, par convention,  $0! = 1$ . Les candidats pourront utiliser la notation  $C_n^k$  si elle leur est plus familière. La notation  $\mathbb{N}$  désigne l'ensemble des entiers positifs ou nuls (entiers naturels).

### OBJET DU PROBLÈME

Soit  $K$  un corps commutatif de caractéristique nulle. Dans tout le problème,  $\mathcal{P}$  désigne l'algèbre  $K[x]$  des polynômes à une indéterminée et à coefficients dans  $K$ . On note  $\mathcal{P}^*$  le dual de  $\mathcal{P}$ , c'est-à-dire l'espace vectoriel des formes linéaires sur  $\mathcal{P}$ . Si  $L$  appartient à  $\mathcal{P}^*$  et  $p$  à  $\mathcal{P}$ , on note  $\langle L, p \rangle$  la valeur de  $L$  en  $p$ .

Une *suite polynomiale*  $(p_n)_{n \in \mathbb{N}}$  est une suite d'éléments de  $\mathcal{P}$  tels que, pour tout  $n$ , le polynôme  $p_n$  soit exactement de degré  $n$ . En particulier  $p_0$  est un polynôme constant non nul. On remarquera que les éléments d'une telle suite forment une base de  $\mathcal{P}$ .

Une *suite binomiale* est une suite polynomiale  $(p_n)_{n \in \mathbb{N}}$  telle que, pour tout  $n$ , on ait, dans  $K[x, y]$  l'identité

$$p_n(x+y) = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} p_k(x) p_{n-k}(y).$$

Par exemple, la suite  $(x^n)_{n \in \mathbb{N}}$  est binomiale.

L'objet du problème est l'étude des suites binomiales. Toutefois ces suites n'interviennent pas dans la première partie.

## PREMIÈRE PARTIE

Pour tout élément  $a$  de  $K$ , on note  $\varepsilon_a$  l'élément de  $\mathfrak{Q}^*$  défini par

$$\langle \varepsilon_a, p \rangle = p(a) \quad \text{pour tout } p \in \mathfrak{Q}$$

et l'on pose  $\varepsilon = \varepsilon_0$ .

Soient  $L$  et  $M$  deux éléments de  $\mathfrak{Q}^*$  et  $L \otimes M$  la forme linéaire sur  $K[x, y]$  définie par

$$\langle L \otimes M, x^i y^j \rangle = \langle L, x^i \rangle \langle M, y^j \rangle \quad \text{pour } i, j \in \mathbb{N}.$$

On appelle produit de  $L$  et de  $M$  et on note  $LM$ , la forme linéaire sur  $\mathfrak{Q}$  définie par

$$\langle LM, p \rangle = \langle L \otimes M, p(x+y) \rangle \quad \text{pour tout } p \in \mathfrak{Q}.$$

En particulier si  $(p_n)_{n \in \mathbb{N}}$  est une suite binomiale, on a

$$\langle LM, p_n \rangle = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} \langle L, p_k \rangle \langle M, p_{n-k} \rangle.$$

Muni de ce produit, l'espace vectoriel  $\mathfrak{Q}^*$  est une algèbre associative sur  $K$  (on ne demande pas de vérifier cette assertion).

1° Démontrer que l'algèbre  $\mathfrak{Q}^*$  admet  $\varepsilon$  comme élément unité et que, pour  $a$  et  $b$  éléments de  $K$ , on a  $\varepsilon_a \varepsilon_b = \varepsilon_{a+b}$ .

2° Si  $L$  est un élément non nul de  $\mathfrak{Q}^*$ , on note  $v(L)$  le plus petit entier  $n$  tel que  $\langle L, x^n \rangle$  soit non nul. On pose

$$|L| = 2^{-v(L)}$$

et  $|0| = 0$ .

a. Démontrer, pour  $L$  et  $M$  appartenant à  $\mathfrak{Q}^*$ , que

$$|L + M| \leq \sup(|L|, |M|) \quad \text{et} \quad |LM| = |L| |M|.$$

b. Soit, pour  $L$  et  $M$  appartenant à  $\mathfrak{Q}^*$ ,  $d(L, M) = |L - M|$ ; démontrer que  $d$  est une distance sur  $\mathfrak{Q}^*$ . On munit  $\mathfrak{Q}^*$  de la topologie associée à  $d$  et  $K$  de la topologie discrète (toute partie de  $K$  est donc ouverte). On munit  $\mathfrak{Q}^* \times \mathfrak{Q}^*$  et  $K \times \mathfrak{Q}^*$  des topologies produits correspondantes. Établir, pour  $L$  et  $M$  appartenant à  $\mathfrak{Q}^*$  et  $a$  appartenant à  $K$ , la continuité des applications

$$(L, M) \mapsto L + M, \quad (L, M) \mapsto LM \quad \text{et} \quad (a, L) \mapsto aL.$$

De même,  $p$  étant un élément fixé de  $\mathfrak{Q}$ , démontrer que l'application

$$L \mapsto \langle L, p \rangle$$

de  $\mathfrak{Q}^*$  dans  $K$  est continue.

c. Démontrer que  $\mathfrak{Q}^*$  est complet.

3° Soit  $(L_n)_{n \in \mathbb{N}}$  une suite d'éléments de  $\mathfrak{Q}^*$ . Démontrer que la série de terme général  $L_n$  est convergente si et seulement si la suite  $(L_n)_{n \in \mathbb{N}}$  tend vers 0.

4° Soit  $L$  un élément de  $\mathfrak{Q}^*$ . Démontrer que les trois conditions suivantes sont équivalentes

i)  $\langle L, 1 \rangle = 0$ ;

ii) La suite  $(L^n)_{n \in \mathbb{N}}$  tend vers 0;

iii) Pour toute suite  $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$  d'éléments de  $K$ , la série de terme général  $a_n L^n$  est convergente.

(On convient, pour  $L$  appartenant à  $\mathfrak{Q}^*$ , que  $L^0 = \varepsilon$ ; de même, si  $a$  appartient à  $K$ , on a  $a^0 = 1$ ).

5° Soit  $L$  un élément non nul de  $\mathfrak{A}^*$ , et posons  $v(L) = m$ . Démontrer que, pour tout entier naturel  $k$ , on a  $v(L^k) = km$

et que 
$$\langle L^k, x^{km} \rangle = \frac{(km)!}{(m!)^k} \langle L, x^m \rangle^k.$$

6° On rappelle que,  $n$  et  $k$  étant deux entiers naturels,

$$\delta_{n,k} = \begin{cases} 1 & \text{si } n = k \\ 0 & \text{si } n \neq k \end{cases}$$

Soit  $A$  l'élément de  $\mathfrak{A}^*$  défini par

$$\langle A, x^n \rangle = \delta_{n,1} \quad \text{pour } n \in \mathbb{N}.$$

Démontrer que, pour  $n$  et  $k$  entiers naturels, on a

$$\langle A^k, x^n \rangle = k! \delta_{n,k}.$$

Pour un polynôme  $p$ , que représente  $\langle A^k, p \rangle$  ?

## DEUXIÈME PARTIE

On note  $\mathfrak{A}_0^*$  l'ensemble des éléments non nuls  $L$  de  $\mathfrak{A}^*$  tels que  $v(L) = 1$ .

1° a. Soit  $(p_n)_{n \in \mathbb{N}}$  une suite binomiale. Montrer que  $p_0 = 1$  et que, pour  $n$  non nul, on a  $p_n(0) = 0$ .

b. Démontrer qu'une suite polynomiale  $(p_n)_{n \in \mathbb{N}}$  est binomiale si et seulement si, pour tout  $n \in \mathbb{N}$  et pour tout  $a$  et  $b$  appartenant à  $K$ , on a

$$\langle \varepsilon_a \varepsilon_b, p_n \rangle = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} \langle \varepsilon_a, p_k \rangle \langle \varepsilon_b, p_{n-k} \rangle.$$

2° Soit  $L$  un élément de  $\mathfrak{A}_0^*$ . Démontrer que si un polynôme  $p$  vérifie, pour tout entier naturel  $k$ ,

$$\langle L^k, p \rangle = 0$$

alors  $p = 0$ . Démontrer qu'il existe une unique suite polynomiale  $(p_n)_{n \in \mathbb{N}}$  telle que, pour tout  $n$  et  $k$  entiers naturels, on ait

$$\langle L^k, p_n \rangle = k! \delta_{n,k}.$$

On dit que la suite  $(p_n)_{n \in \mathbb{N}}$  est la *suite associée* à  $L$ .

3° Soient  $L$  un élément de  $\mathfrak{A}_0^*$  et  $(p_n)_{n \in \mathbb{N}}$  la suite associée. Soit  $M$  un élément de  $\mathfrak{A}^*$ .

Démontrer qu'il existe une unique suite  $(a_k)_{k \in \mathbb{N}}$  d'éléments de  $K$  telle que

$$M = \sum_{k=0}^{\infty} a_k L^k$$

et que

$$a_k = \frac{\langle M, p_k \rangle}{k!} \quad \text{pour tout } k \in \mathbb{N}.$$

4° Démontrer que, si M et N sont deux éléments de  $\mathfrak{A}^*$  et L un élément de  $\mathfrak{A}_0^*$  de suite associée  $(p_n)_{n \in \mathbb{N}}$ , alors

$$\langle MN, p_n \rangle = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} \langle M, p_k \rangle \langle N, p_{n-k} \rangle.$$

(on pourra commencer par le cas où M et N sont des puissances de L).

5° Démontrer que la suite associée à un élément de  $\mathfrak{A}_0^*$  est binomiale et qu'inversement toute suite binomiale est la suite associée à un unique élément de  $\mathfrak{A}_0^*$ .

6° a. Soient L un élément de  $\mathfrak{A}_0^*$  et, pour tout entier naturel n,

$$q_n(x) = \sum_{k=0}^n \frac{\langle L^k, x^n \rangle}{k!} x^k.$$

Démontrer que la suite  $(q_n)_{n \in \mathbb{N}}$  est binomiale (on pourra revenir à la définition d'une suite binomiale).

b. Démontrer qu'inversement toute suite binomiale s'obtient de cette manière à partir d'un unique élément de  $\mathfrak{A}_0^*$ .

c. Pour tout élément M de  $\mathfrak{A}_0^*$ , de suite associée  $(p_n)_{n \in \mathbb{N}}$ , il existe ainsi un unique élément  $\tilde{M}$  de  $\mathfrak{A}_0^*$  tel que, pour tout entier naturel n, on ait

$$p_n(x) = \sum_{k=0}^n \frac{\langle \tilde{M}^k, x^n \rangle}{k!} x^k.$$

On dit que  $\tilde{M}$  est le *conjugué* de M. Calculer  $\tilde{A}$ .

### TROISIÈME PARTIE

1° a. Soit T une application linéaire de  $\mathfrak{A}$  dans  $\mathfrak{A}$ ; on note  $T^*$  l'application linéaire de  $\mathfrak{A}^*$  dans  $\mathfrak{A}^*$  transposée de T. Démontrer que  $T^*$  est continue.

b. Soit U une application linéaire continue de  $\mathfrak{A}^*$  dans  $\mathfrak{A}^*$ . Démontrer que, pour tout polynôme p, il existe un unique polynôme q tel que, pour tout entier naturel k, l'on ait

$$\langle U(A^k), p \rangle = \langle A^k, q \rangle.$$

En déduire que U est la transposée d'une application linéaire de  $\mathfrak{A}$  dans  $\mathfrak{A}$ .

2° Soient L un élément de  $\mathfrak{A}_0^*$  et  $(p_n)_{n \in \mathbb{N}}$  la suite associée.

a. Soit  $\alpha_L$  l'application linéaire de  $\mathfrak{A}$  dans  $\mathfrak{A}$  définie par

$$\alpha_L(x^n) = p_n \quad \text{pour tout } n \in \mathbb{N}.$$

Déterminer  $\alpha_L^*(L^k)$  pour  $k \in \mathbb{N}$ .

b. Soit  $\mathfrak{A}$  l'ensemble des  $\alpha_L$  pour L appartenant à  $\mathfrak{A}_0^*$ . Démontrer qu'une application linéaire  $\alpha$  de  $\mathfrak{A}$  dans  $\mathfrak{A}$  appartient à  $\mathfrak{A}$  si et seulement si  $\alpha^*$  est un isomorphisme algébrique et topologique de l'algèbre  $\mathfrak{A}^*$  sur elle-même.

c. Soit  $\theta_L$  l'application linéaire de  $\mathfrak{A}$  dans  $\mathfrak{A}$  définie par

$$\theta_L(p_n) = p_{n+1} \quad \text{pour tout } n \in \mathbb{N}.$$

Une dérivation de  $\mathfrak{A}^*$  est une application linéaire  $\delta$  de  $\mathfrak{A}^*$  dans  $\mathfrak{A}^*$  telle que, pour tout  $M$  et  $N$  appartenant à  $\mathfrak{A}^*$ , on ait

$$\delta(MN) = M\delta(N) + \delta(M)N.$$

Démontrer que  $\theta_L^*$  est une dérivation surjective de  $\mathfrak{A}^*$  et qu'inversement, pour toute dérivation continue surjective  $\delta$  de  $\mathfrak{A}^*$ , il existe un élément  $L$  de  $\mathfrak{A}_0^*$  tel que  $\delta = \theta_L^*$ . On pose

$$\delta_L = \theta_L^*.$$

Calculer  $\delta_L(L^k)$  pour  $k$  entier naturel et préciser le noyau de  $\delta_L$ .

3° Soit  $\alpha$  une application linéaire de  $\mathfrak{A}$  dans  $\mathfrak{A}$  et soit  $(p_n)_{n \in \mathbb{N}}$  une suite binomiale quelconque. Démontrer que  $\alpha$  appartient à  $\mathfrak{A}$  si et seulement si la suite  $(\alpha(p_n))_{n \in \mathbb{N}}$  est binomiale.

4° a. Soient  $L$  et  $M$  deux éléments de  $\mathfrak{A}_0^*$ . Démontrer qu'il existe un unique élément de  $\mathfrak{A}_0^*$ , noté  $L \circ M$ , tel que

$$\alpha_{L \circ M} = \alpha_L \circ \alpha_M.$$

b. Démontrer que  $\mathfrak{A}_0^*$ , muni de la loi  $\circ$  que l'on vient de définir, est un groupe. Quel est son élément neutre?

c. Soient  $L$  et  $M$  deux éléments de  $\mathfrak{A}_0^*$  et soient  $(p_n)_{n \in \mathbb{N}}$ ,  $(q_n)_{n \in \mathbb{N}}$  et  $(r_n)_{n \in \mathbb{N}}$  les suites respectivement associées à  $L$ ,  $M$  et  $L \circ M$ . Démontrer que si

$$q_n(x) = \sum_{k=0}^n c_{n,k} x^k$$

alors

$$r_n(x) = \sum_{k=0}^n c_{n,k} p_k(x).$$

5° Soient  $L$  un élément de  $\mathfrak{A}_0^*$  et  $\bar{L}$  son conjugué (cf. deuxième partie, 6° c).

Montrer que  $\bar{L} \circ L = A$ . Quel est le conjugué de  $\bar{L}$ ?

6° Soient  $L$  et  $M$  deux éléments de  $\mathfrak{A}_0^*$ . Démontrer que si

$$M = \sum_{k=1}^{\infty} b_k A^k \quad b_k \in K, \text{ pour tout } k,$$

alors

$$L \circ M = \sum_{k=1}^{\infty} b_k L^k.$$

## QUATRIÈME PARTIE

1° Soit  $L$  un élément de  $\mathfrak{A}^*$ .

a. Démontrer qu'il existe une unique application linéaire  $\mu_L$  de  $\mathfrak{A}$  dans  $\mathfrak{A}$  telle que, pour tout élément  $M$  de  $\mathfrak{A}^*$  et tout élément  $p$  de  $\mathfrak{A}$ , on ait

$$\langle LM, p \rangle = \langle M, \mu_L(p) \rangle$$

b. Déterminer  $\mu_A$  et, pour  $a \in K$ , déterminer  $\mu_{\varepsilon_a}$ . On pose  $D = \mu_A$ .

c.  $L$  et  $M$  étant deux éléments de  $\mathfrak{A}^*$ , déterminer  $\mu_L + \mu_M$  et  $\mu_L \circ \mu_M$ .

2° Soient  $L$  un élément de  $\mathfrak{A}_0^*$  et  $(p_n)_{n \in \mathbb{N}}$  la suite associée à  $L$ . Établir que cette suite est caractérisée par les propriétés suivantes

i.  $p_0 = 1$

ii.  $p_n(0) = 0$  pour  $n \geq 1$

iii.  $\mu_L(p_n) = n p_{n-1}$  pour  $n \geq 1$ .

3° a. Soient  $L$  et  $M$  deux éléments de  $\mathfrak{A}_0^*$ . On pose  $N = \partial_M(L)$ . Démontrer que  $N$  est un élément inversible de l'algèbre  $\mathfrak{A}^*$  et que

$$\theta_M = \theta_L \circ \mu_N.$$

b. Soient  $L$  un élément de  $\mathfrak{A}_0^*$  et  $(p_n)_{n \in \mathbb{N}}$  la suite associée à  $L$ . En faisant  $M = A$  dans la formule précédente, établir la formule de récurrence

$$p_{n+1}(x) = x \left[ (\mu_{\partial_A(L)})^{-1} (p_n(x)) \right]$$

4° a. Soit  $L$  un élément de  $\mathfrak{A}_0^*$ . Démontrer qu'il existe un élément inversible  $M$  de l'algèbre  $\mathfrak{A}^*$  tel que  $L = AM$ .

b. A l'aide de la question 2° de la quatrième partie, démontrer que, pour tout entier naturel  $n$ , on a

$$p_n(x) = (\mu_{\partial_A(L)} \circ \mu_{M^{-n-1}})(x^n)$$

où  $(p_n)_{n \in \mathbb{N}}$  est la suite associée à  $L$ .

En déduire que, pour tout  $n \geq 1$ , on a

$$p_n(x) = x \mu_{M^{-n}}(x^{n-1}).$$

## CINQUIÈME PARTIE : EXEMPLES

1° On prend

$$L = A(A - \varepsilon)^{-1}.$$

a. Montrer que  $L$  appartient à  $\mathfrak{A}_0^*$ .

b. On note  $(\mathcal{L}_n)_{n \in \mathbb{N}}$  la suite associée à  $L$  (les  $\mathcal{L}_n$  sont les polynômes de Laguerre). Démontrer que, pour  $n \geq 1$ , on a

$$\mathcal{L}_n(x) = x((D - I)^n(x^{n-1})) = -(D - I)^{n-1}(x^n)$$

où  $I$  est l'application identique de  $\mathfrak{A}$  dans  $\mathfrak{A}$ . Expliciter les coefficients des polynômes  $\mathcal{L}_n$ .

- c. Soit  $a$  un élément non nul de  $K$ . Démontrer que  $(\mathcal{L}_n(ax))_{n \in \mathbb{N}}$  est la suite associée à

$$\frac{1}{a} A \left( \frac{1}{a} A - \varepsilon \right)^{-1}.$$

En déduire une expression de  $\mathcal{L}_n(ax)$  sous forme de combinaison linéaire des  $\mathcal{L}_k(x)$  (formule de duplication des polynômes de Laguerre).

2° Si  $r$  est un élément de  $K$ , on pose

$$e^{rA} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{r^k}{k!} A^k.$$

- a. Vérifier que  $e^{rA} = \varepsilon_r$  et que  $e^A - \varepsilon$  et  $\varepsilon - e^{-A}$  appartiennent à  $\mathcal{E}_0^*$ .
- b. Soient  $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$  et  $(v_n)_{n \in \mathbb{N}}$  les suites associées respectivement à  $e^A - \varepsilon$  et  $\varepsilon - e^{-A}$ . Calculer  $u_n$  et  $v_n$ .
- c. Exprimer  $u_n$  sous forme de combinaison linéaire des polynômes  $v_k$ .