

# Agrégation externe 2004

## Analyse et probabilités

# 6989

Le but du problème est de donner une preuve partielle du théorème de la variété stable.

### Préliminaires et notations

#### Préliminaires généraux

Dans tout le problème,  $k$  désigne un entier strictement positif;  $\mathbb{R}$  est le corps des nombres réels,  $\mathbb{C}$  celui des nombres complexes. Le complémentaire d'un sous-ensemble  $Y$  dans  $X$  est noté  $X - Y$ .

Si  $E$  et  $F$  sont des espaces vectoriels,  $\mathcal{L}(E, F)$  désigne l'ensemble des applications linéaires de  $E$  dans  $F$ ,  $\text{End}(E)$  l'ensemble des endomorphismes de  $E$  et  $\text{Aut}(E)$  celui des automorphismes de  $E$ . Le déterminant d'un endomorphisme  $A$  est noté  $\det A$ .

Dans  $\mathbb{R}^k$ , le produit scalaire canonique de deux vecteurs  $u$  et  $v$  est noté  $\langle u, v \rangle$ .

Si  $f$  est un homéomorphisme d'un espace métrique  $(X, d)$ , on désigne par  $f^n$  la  $n$ -ième itérée de  $f$ . Si  $x$  est élément de  $X$ , la variété<sup>1</sup> stable pour  $f$  du point  $x$  est l'ensemble

$$W_x^s(f) = \{y \in X \mid \lim_{n \rightarrow \infty} d(f^n(x), f^n(y)) = 0\}.$$

De même, la variété instable pour  $f$  du point  $x$  est l'ensemble

$$W_x^u(f) = \{y \in X \mid \lim_{n \rightarrow \infty} d(f^{-n}(x), f^{-n}(y)) = 0\}.$$

Soit  $\gamma$  un réel strictement positif. On rappelle qu'une application  $f$  d'un espace métrique  $(X, d)$  dans lui-même est lipschitzienne de rapport  $\gamma$  (ou  $\gamma$ -lipschitzienne) si

$$\forall (x, y) \in X^2, \quad d(f(y), f(x)) \leq \gamma d(x, y).$$

On note  $Li_\gamma$  l'ensemble des applications  $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$   $\gamma$ -lipschitziennes s'annulant en 0.

#### Fonctions définies sur $\mathbb{R}^2$

Dans les parties 1, 4 et 5,  $\mathbb{R}^2$  sera muni de la norme  $\|(x_1, x_2)\| = \max\{|x_1|, |x_2|\}$ .

Soit  $h$  une application bornée, élément de  $C^1(\mathbb{R}^2, \mathbb{R})$  et dont la différentielle  $dh$  est bornée. On note :

- $|h|_\infty = \sup_{x \in \mathbb{R}^2} |h(x)|$ ;
- $dh_x$  la différentielle de  $h$  au point  $x$  ( $dh_x \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^2, \mathbb{R})$ ) ;
- $\|dh_x\|$  la norme subordonnée dans  $\mathcal{L}(\mathbb{R}^2, \mathbb{R})$  de  $dh_x$  ;
- $|dh|_\infty = \sup_{x \in \mathbb{R}^2} \|dh_x\|$  ;

et on pose  $|h|_{C^1} = \max(|h|_\infty, |dh|_\infty)$ .

#### Liens entre les différentes parties

- la partie 3 utilise les résultats de la partie 2 ;
- la partie 4 utilise les résultats des parties 1 et 2 ;
- la partie 5 est indépendante du reste du problème.

Les candidats peuvent admettre les résultats d'une question à condition de l'indiquer clairement et poursuivre le problème en respectant la numérotation des questions.

1. Dans ce problème, le mot variété est juste une notation.

## 1. Introduction

**1.1.** Montrer que l'application  $d_\gamma : (\varphi, \psi) \mapsto \sup_{x \in \mathbb{R} - \{0\}} \frac{|\psi(x) - \varphi(x)|}{|x|}$ , définie sur  $(Li_\gamma)^2$ , est une distance.

**1.2.** Montrer que, pour la métrique définie par la distance  $d_\gamma$ ,  $Li_\gamma$  est complet.

**1.3.** Soient  $\mu > 0$ ,  $h \in C^1(\mathbb{R}^2, \mathbb{R})$  et  $\varphi \in Li_\gamma$  tels que  $|h|_{C^1}(1 + \gamma) < \mu$ .

Montrer que l'application  $G_\varphi$  définie par

$$\forall x \in \mathbb{R}, G_\varphi(x) = \mu x + h(x, \varphi(x)),$$

est strictement croissante. En déduire que  $G_\varphi$  un homéomorphisme de  $\mathbb{R}$ .

## 2. Partie linéaire

Soit  $A$  un endomorphisme de  $\mathbb{R}^k$ . Le rayon spectral  $r(A)$  est par définition le maximum des modules des valeurs propres complexes de  $A$ .

**2.1.** Soit  $\varepsilon'$  un réel strictement positif. Justifier qu'il existe une base  $\mathcal{B}$  de  $\mathbb{C}^k$  dans laquelle la matrice

$$a = (a_{i,j})_{\substack{1 \leq i \leq k \\ 1 \leq j \leq k}}$$

de  $A$  est triangulaire supérieure et telle que pour tous  $i$  et  $j$  vérifiant  $1 \leq i < j \leq k$ , on ait  $|a_{i,j}| \leq \varepsilon'$ .

**2.2.** En déduire que pour tout réel  $\varepsilon$  strictement positif, il existe sur  $\mathbb{R}^k$  une norme notée  $N$  dite  $\varepsilon$ -adaptée pour  $A$ , c'est-à-dire telle que pour la norme d'opérateur subordonnée  $\|\cdot\|_N$  :

$$\|A\|_N \leq r(A) + \varepsilon.$$

**2.3.** Montrer que, pour toute norme  $\|\cdot\|$  sur  $\mathbb{R}^k$  et tout réel  $\varepsilon$  strictement positif, il existe une constante  $C_\varepsilon$  strictement positive telle que, pour tout  $v \in \mathbb{R}^k$  et tout  $n \in \mathbb{N}^*$ ,

$$\|A^n v\| \leq C_\varepsilon (r(A) + \varepsilon)^n \|v\|.$$

On dira que  $A \in \text{End}(\mathbb{R}^k)$  est hyperbolique si toutes ses valeurs propres complexes ont un module différent de 1.

*Dans toute la suite de cette partie,  $A$  désigne un endomorphisme hyperbolique de  $\mathbb{R}^k$ .*

**2.4.** Montrer qu'il existe deux sous-espaces vectoriels supplémentaires  $E^+$  et  $E^-$  de  $\mathbb{R}^k$  stables par  $A$  tels que la restriction de  $A$  à  $E^+$  (resp.  $E^-$ ) ait toutes ses valeurs propres (dans  $\mathbb{C}$ ) de module strictement supérieur (resp. inférieur) à 1.

On désigne par  $A|_E$  la restriction de  $A$  au sous-espace  $E$ .

**2.5.** Montrer que  $(A|_{E^+})$  est inversible.

**2.6.** Montrer qu'il existe une norme dite  $A$ -adaptée  $\|\cdot\|$  telle que

$$\forall(x^+, x^-) \in E^+ \times E^-, \|x^+ + x^-\| = \max(\|x^+\|, \|x^-\|)$$

et de plus pour la norme subordonnée :

$$\|A|_{E^-}\| < 1 \text{ et } \|(A|_{E^+})^{-1}\| < 1.$$

**2.7.** Montrer que, pour tout  $v \in E^-$ , la suite  $(A^n(v))_{n \in \mathbb{N}}$  converge vers 0.

**2.8.** Montrer de même que, pour tout  $v \in E^+$  non nul, la suite  $(\|A^n(v)\|)_{n \in \mathbb{N}}$  tend vers  $+\infty$ .

### Préliminaires pour les parties 3 et 4

Le tore  $\mathbb{T}^k$  est par définition le groupe additif quotient du groupe  $(\mathbb{R}^k, +)$  par le sous-groupe  $(\mathbb{Z}^k, +)$ . Tout élément  $x$  de  $\mathbb{T}^k$  peut s'écrire de manière unique  $x = (x_1, \dots, x_k)$ , avec  $x_i \in \mathbb{T}^1$ , pour  $i = 1, \dots, k$ .

On définit la projection canonique  $\Pi : \mathbb{R}^k \rightarrow \mathbb{R}^k / \mathbb{Z}^k = \mathbb{T}^k$ .

## 3. Linéarité et topologie

On considère le sous-ensemble  $E = \{L \in \text{End}(\mathbb{R}^k) \mid L(\mathbb{Z}^k) \subset \mathbb{Z}^k\}$  de  $\text{End}(\mathbb{R}^k)$  ainsi que le sous-ensemble  $\mathcal{E} = \{L \in \text{Aut}(\mathbb{R}^k) \mid L \in E \text{ et } L^{-1} \in E\}$  de  $\text{Aut}(\mathbb{R}^k)$ .

**3.1.** Montrer qu'un élément  $L$  de  $\text{End}(\mathbb{R}^k)$  appartient à  $E$  si, et seulement si, sa matrice dans la base canonique de  $\mathbb{R}^k$  est à coefficients dans  $\mathbb{Z}$ .

**3.2.** Montrer qu'un élément  $L$  de  $E$  appartient à  $\mathcal{E}$  si, et seulement si,  $\det L$  vaut  $-1$  ou  $1$ .

**3.3.** Dans cette question, on se place dans  $\mathbb{R}^2$  et on considère l'endomorphisme  $L$  défini, pour tout  $(x, y) \in \mathbb{R}^2$ , par  $L(x, y) = (2x + y, x + y)$ . Cet endomorphisme est-il hyperbolique ? Est-il dans l'ensemble  $\mathcal{E}$  ?

Existe-t-il des exemples comparables sur  $\mathbb{R}$  ?

*Dans toute la suite de cette partie 3,  $L$  désigne un élément hyperbolique de  $\mathcal{E}$ . Les sous-espaces vectoriels  $E^+$  et  $E^-$  sont deux sous-espaces vectoriels supplémentaires de  $\mathbb{R}^k$  stables par  $L$  tels que la restriction de  $L$  à  $E^+$  (resp.  $E^-$ ) ait toutes ses valeurs propres (dans  $\mathbb{C}$ ) de module strictement supérieur (resp. inférieur) à 1 ; l'existence de cette décomposition a été démontrée au 2.4.*

On dit qu'un élément  $x$  de  $[0, 1]^k$  est un point périodique de  $L$  s'il existe un entier  $p$  strictement positif tel que  $L^p(x) - x$  appartient à  $\mathbb{Z}^k$ . On désigne par  $\text{Per}L$  l'ensemble des points périodiques de  $L$ .

**3.4.** Démontrer que l'ensemble des points périodiques de  $L$  est donné par

$$\text{Per}L = \mathbb{Q}^k \cap [0, 1]^k.$$

En déduire que  $\text{Per}L$  est dense dans  $[0, 1]^k$ .

**3.5.** Montrer que pour une distance donnant la topologie usuelle, les variétés stables et instables pour  $L$  d'un point  $a$  de  $\mathbb{R}^k$  sont respectivement  $W_a^s(L) = a + E^-$  et  $W_a^u(L) = a + E^+$ .

**3.6.** Soit  $N$  une norme sur  $\mathbb{R}^k$ . On définit une application  $d$  de  $\mathbb{T}^k \times \mathbb{T}^k$  dans  $\mathbb{R}$  en posant

$$d(y, y') = \inf \{ N(x - x') \mid x, x' \in \mathbb{R}^k \text{ avec } \Pi(x) = y \text{ et } \Pi(x') = y' \}.$$

- (1) Montrer que  $\inf_{z \in \mathbb{Z}^k - \{0\}} N(z)$  est strictement positif.
- (2) Montrer que  $d$  définit une distance sur  $\mathbb{T}^k$ .
- (3) Prouver que l'application  $\Pi : \mathbb{R}^k \rightarrow \mathbb{T}^k$  est continue.

Dans la suite,  $\mathbb{T}^k$  est muni de la topologie associée à la distance  $d$ .

**3.7.** Montrer que  $L$  induit un homéomorphisme noté  $F_L$  du tore  $\mathbb{T}^k$  satisfaisant la relation de commutation

$$F_L \circ \Pi = \Pi \circ L.$$

La suite de cette partie n'est pas utilisée dans le reste du problème.

**3.8.** On suppose que la distance  $d$  provient d'une norme  $N$  adaptée pour  $L$ . Montrer que :

- (1)  $\Pi(0 + E^-) \subset W_0^s(F_L)$  ;
- (2)  $\Pi(0 + E^+)$  est dense dans  $\mathbb{T}^k$  ;
- (3) la variété stable pour  $F_L$  du point 0 est dense dans  $\mathbb{T}^k$ .

Une application continue  $f : \mathbb{T}^k \rightarrow \mathbb{T}^k$  est dite topologiquement mélangeante si, pour toute paire d'ouverts non vides  $U$  et  $V$  de  $\mathbb{T}^k$ , il existe un entier  $n_0$ , tel que :

$$\forall n > n_0, f^n(U) \cap V \neq \emptyset.$$

**3.9.** Montrer qu'une isométrie de  $\mathbb{T}^k$  n'est pas une application topologiquement mélangeante.

**3.10.** Montrer que  $F_L$  est une application topologiquement mélangeante.

**Indication :** On pourra utiliser, outre le fait que 0 est un point fixe, la densité de la variété stable pour un automorphisme hyperbolique  $F_L$  du point 0 ainsi que la densité de la variété stable pour  $F_L^{-1}$  du point 0.

## 4. Un exemple presque linéaire dans $\mathbb{R}^2$

Dans la partie 4,  $f$  est une application élément de  $C^1(\mathbb{R}^2, \mathbb{R}^2)$ , fixant l'origine et proche en  $C^1$ -topologie d'un automorphisme linéaire hyperbolique diagonal  $A$  défini, pour tout  $(x, y) \in \mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}^2$  par  $A(x, y) = (\mu x, \lambda y)$  avec  $0 < \lambda < 1 < \mu$ . Ceci signifie que  $f$  est de la forme

$$f(x, y) = (\mu x + \alpha(x, y), \lambda y + \beta(x, y))$$

avec  $\alpha$  et  $\beta$  vérifiant  $\alpha(0, 0) = 0$ ,  $\beta(0, 0) = 0$  et il existe un réel  $\delta$ , strictement positif, tel que  $|\alpha|_{C^1} < \delta$  et  $|\beta|_{C^1} < \delta$ .

Dans la suite  $\delta$  sera considéré comme petit, ce qui sera précisé par des inégalités.

4.1. Prouver que si  $2\delta < \lambda$ ,  $f$  est un difféomorphisme de  $\mathbb{R}^2$ .

**Indication :** On pourra montrer que pour tout  $(x', y') \in \mathbb{R}^2$  l'application

$$F_{(x', y')} : (x, y) \mapsto \left( \frac{x'}{\mu} - \frac{\alpha(x, y)}{\mu}, \frac{y'}{\lambda} - \frac{\beta(x, y)}{\lambda} \right)$$

est lipschitzienne de rapport  $a$ , avec  $0 < a < 1$ .

### Inégalités (\*)

Dans toute la suite de cette partie on suppose qu'il existe un nombre  $\gamma$  vérifiant les inégalités

$$(*) \begin{cases} 0 < \gamma < 1 \\ 0 < \delta < \frac{\gamma(\mu - \lambda)}{\gamma + 2} \end{cases}$$

Le graphe d'une application  $\varphi : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  est la partie de  $\mathbb{R}^2$  définie par

$$H\varphi = \{(x, \varphi(x)) \mid x \in \mathbb{R}\}.$$

Dans la suite, on considère l'application  $G_\varphi$  définie, pour tout  $x$  réel, par

$$G_\varphi(x) = \mu x + \alpha(x, \varphi(x)).$$

4.2. Montrer que si  $\varphi$  est élément de  $Li_\gamma$  il existe une fonction  $\psi : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  telle que :  $f(H\varphi) = H\psi$ .

4.3. Montrer que  $f_* : \varphi \mapsto \psi$ , définie à la question précédente, est une application de  $Li_\gamma$  dans lui-même.

4.4. Prouver pour tous  $\varphi$  et  $\varphi'$  dans  $Li_\gamma$  et pour tout  $x$  dans  $\mathbb{R}$ , l'inégalité

$$|f_*(\varphi)(G_\varphi(x)) - f_*(\varphi')(G_{\varphi'}(x))| \leq (\lambda + \delta(1 + \gamma)) |\varphi'(x) - \varphi(x)|.$$

4.5. En déduire qu'il existe une application  $\varphi^+$  dans  $Li_\gamma$  dont le graphe  $H_{\varphi^+}$  est invariant par  $f$ .

4.6. Prouver l'inégalité  $|f(x, \varphi^+(x))| \geq (\mu - \delta) |(x, \varphi^+(x))|$ .

4.7. Pourquoi, si  $\gamma, \delta$  satisfont les inégalités (\*) et si  $\delta$  est suffisamment petit, peut-on dire que l'ensemble  $\{(x, \varphi^+(x)) \mid x \in \mathbb{R}\}$  est contenu dans la variété instable pour  $f$  du point  $(0, 0)$  ?

### Commentaires sur les variétés stables et instables

On prouverait avec les mêmes arguments l'existence d'une variété stable de l'origine qui est le "graphe vertical" d'une fonction lipschitzienne  $\varphi^- \in Li_\gamma$  c'est-à-dire

$$W_0^s(f) = \{(\varphi^-(x), x) \mid x \in \mathbb{R}\}.$$

On pourrait aussi montrer que les variétés stables et instables sont en fait des graphes d'applications de classe  $C^1$ .

## 5. Différentiabilité des fonctions lipschitziennes

Soit  $\varphi \in Li_\gamma$  et  $x \in \mathbb{R}$ ; on introduit, pour  $y \neq x$ ,  $\Delta_y \varphi = \frac{(y, \varphi(y)) - (x, \varphi(x))}{|(y, \varphi(y)) - (x, \varphi(x))|}$ , on pose :

$$U_x \varphi = \left\{ v \in \mathbb{R}^2 \mid \exists (x_n)_{n \in \mathbb{N}}, \lim_{n \rightarrow \infty} x_n = x, \forall n \in \mathbb{N}, x_n \neq x \text{ et } \lim_{n \rightarrow \infty} \Delta_{x_n} \varphi = v \right\}$$

et on définit l'ensemble tangent au graphe de  $\varphi$  au point  $x$  comme

$$T_x \varphi = \bigcup_{v \in U_x \varphi} \mathbb{R}v, \text{ avec } \mathbb{R}v = \{av \mid a \in \mathbb{R}\}.$$

- 5.1.** Montrer que  $\text{pr}_1(T_x \varphi) = \mathbb{R}$  où  $\text{pr}_1$  est la projection sur le premier facteur :  
pour  $u = (u_1, u_2) \in \mathbb{R}^2$ ,  $\text{pr}_1(u) = u_1$ .

**Indication :** On pourra remarquer que pour tout  $y \neq x$ ,  $|\Delta_y \varphi| = 1$ .

- 5.2.** Le cône horizontal  $H^\gamma$  est l'ensemble  $H^\gamma = \{(u_1, u_2) \in \mathbb{R}^2 \mid |u_2| \leq \gamma |u_1|\}$ .  
Montrer l'inclusion  $T_x \varphi \subset H^\gamma$ .

- 5.3.** On considère la fonction continue sur  $\mathbb{R}$  définie pour tout réel  $x$  non nul par

$$\phi(x) = \frac{x}{2} \cdot \sin(\ln |x|).$$

Appartient-elle à  $Li_\gamma$  pour un certain  $\gamma$ ? Expliciter  $T_0 \phi$ .

- 5.4.** On suppose que  $\gamma \leq 1$ . Montrer que, si  $T_x \varphi$  est un sous-espace vectoriel de dimension 1 de  $\mathbb{R}^2$ , alors  $\varphi$  est dérivable en  $x$ .