

Agrégation de Mathématiques 2000 - Concours Externe

Mathématiques Générales

Pour deux entiers $t, u \geq 1$, on notera $\mathbb{M}_{t,u}(\mathbb{C})$ (resp. $\mathbb{M}_t(\mathbb{C})$) l'espace des matrices à t lignes et u colonnes (resp. carrées à t lignes) à coefficients dans $\mathbb{C}$, munis de leur topologies habituelles. Pour q entier, on notera I_q la matrice identité $q \times q$. Pour un entier $n \geq 1$ et un sous-groupe S de $\mathrm{GL}(2n, \mathbb{C})$, on notera $\mathrm{Ad} g(X)$ le conjugué gXg^{-1} de $X \in \mathbb{M}_{2n}(\mathbb{C})$ par $g \in S$, et $\mathrm{Ad}(S)X = \{\mathrm{Ad} g(X), g \in S\}$.

Dans tout le problème on notera M le sous-groupe de $\mathrm{GL}(2n, \mathbb{C})$ formé des matrices blocs $\begin{bmatrix} A & 0 \\ 0 & {}^tA^{-1} \end{bmatrix}$ où $A \in \mathrm{GL}(n, \mathbb{C})$; on remarquera qu'il est isomorphe à $\mathrm{GL}(n, \mathbb{C})$. On désigne par $\mathcal{S}$ l'espace vectoriel des matrices $n \times n$ symétriques complexes et $\mathcal{A}$ l'espace vectoriel des matrices $n \times n$ alternées (ou antisymétriques) complexes.

I

1. Montrez que le groupe M opère sur $\mathcal{S}$ (resp. $\mathcal{A}$) par l'action $(g, X) \mapsto {}^tA^{-1}XA^{-1}$ où $g = \begin{bmatrix} A & 0 \\ 0 & {}^tA^{-1} \end{bmatrix} \in M$ et $X \in \mathcal{S}$ (resp. $\mathcal{A}$).

Deux matrices, dans la même orbite pour l'action précédente, sont dites congrues.

2. Déterminez les orbites X_i pour cette action.
3. Si Ω est l'une de ces orbites, déterminez l'adhérence $\overline{\Omega}$ de Ω dans $\mathcal{S}$ au moyen des orbites X_i .

On utilisera pas dans la suite du problème les propriétés topologiques de cette adhérence ni de celle définie en **II 3**).

II

On posera $J_r = \begin{bmatrix} 0 & I_r \\ -I_r & 0 \end{bmatrix}$, r entier positif, avec la convention, si $r = 0$, que $I_0 = 0$ et donc $J_0 = 0$.

1. Montrez que toute matrice alternée complexe $n \times n$ de rang $2r$ est congrue à une matrice bloc $\begin{bmatrix} J_r & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$.
On pourra montrer d'abord que la matrice d'une forme bilinéaire alternée non dégénérée est, dans une certaine base, une diagonale de blocs 2×2 : $\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{bmatrix}$.
2. Déterminez les orbites Y_j de M dans l'action sur $\mathcal{A}$ pour la congruence.
3. Si Ω est l'une des orbites précédentes, déterminez l'adhérence $\overline{\Omega}$ de Ω dans $\mathcal{A}$.

III

Soient E un $\mathbb{C}$ -espace vectoriel de dimension $2n$ et L, L' deux sous-espaces supplémentaires de dimension n , $E = L \oplus L'$. On choisit des bases $(e_1, e_2, \dots, e_n)$ de L et $(e_{-1}, e_{-2}, \dots, e_{-n})$ de L' et l'on définit sur E une forme bilinéaire symétrique, notée $(\ , \)$, pour laquelle L et L' sont des sous-espaces totalement isotropes tels que $(e_i, e_j) = \delta_{-i,j}$ pour $i = 1, 2, \dots, n, j = -1, -2, \dots, -n$ où δ est le symbole de Kronecker.

1. Ecrire la matrice P de la forme bilinéaire $(\ , \)$ dans la base $(e_1, e_2, \dots, e_{-n})$ de E .

On note G^s le groupe des matrices q complexes $2n \times 2n$, telles que ${}^t q P q = P$, et $\mathcal{G}^\sigma$ l'espace des matrices z complexes $2n \times 2n$, qui vérifient $P^t z + z P = 0$.

2. Montrez que $\mathcal{G}^\sigma$ est stable pour la conjugaison par les matrices de G^s .
3. Décrire la forme des matrices blocs 2×2 qui appartiennent à l'espace $\mathcal{G}^\sigma$.

IV

Soient F un $\mathbb{C}$ -espace vectoriel de dimension $2n$ et U, U' deux sous-espaces supplémentaires de dimension n , $F = U \oplus U'$. On choisit des bases $(e_1, e_2, \dots, e_n)$ de U et $(e_{-1}, e_{-2}, \dots, e_{-n})$ de U' et l'on définit sur F une forme bilinéaire alternée, notée $\langle \ | \ \rangle$, dont la matrice dans la base $(e_1, e_2, \dots, e_n, e_{-1}, e_{-2}, \dots, e_{-n})$ est J_n .

On notera G^a le groupe des matrices q inversibles $2n \times 2n$ telles que ${}^t q J_n q = J_n$.

1. Quelles relations nécessaires et suffisantes doivent vérifier $A, B, C, D \in \mathbb{M}_n(\mathbb{C})$ pour que la matrice bloc

$$\begin{bmatrix} A & B \\ C & D \end{bmatrix}$$

appartienne à G^a ?

2. Montrez que G^a laisse stable pour la conjugaison l'espace $\mathcal{G}^A$ des matrices blocs

$$\begin{bmatrix} A & B \\ C & -{}^t A \end{bmatrix}$$

où $A, B, C \in \mathbb{M}_n(\mathbb{C})$ et $B, C \in \mathcal{S}$.

V

On définit les sous-espaces suivants de $\mathbb{M}_{2n}(\mathbb{C})$:

$$\begin{aligned} \underline{\mathcal{M}} &= \left\{ \begin{bmatrix} A & 0 \\ 0 & -{}^t A \end{bmatrix}, A \in \mathbb{M}_n(\mathbb{C}) \right\} \\ \underline{r}_a^+ &= \left\{ \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ C & 0 \end{bmatrix}, C = -{}^t C \in \mathbb{M}_n(\mathbb{C}) \right\} & \underline{r}_s^+ &= \left\{ \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ C & 0 \end{bmatrix}, C = {}^t C \in \mathbb{M}_n(\mathbb{C}) \right\} \\ \underline{r}_a^- &= \left\{ \begin{bmatrix} 0 & B \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, B = -{}^t B \in \mathbb{M}_n(\mathbb{C}) \right\} & \underline{r}_s^- &= \left\{ \begin{bmatrix} 0 & B \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, B = {}^t B \in \mathbb{M}_n(\mathbb{C}) \right\} \\ \underline{p}_\lambda^+ &= \underline{\mathcal{M}} \oplus \underline{r}_\lambda^+ \quad \text{où } \lambda = s \text{ ou } a \\ \underline{p}_\lambda^- &= \underline{\mathcal{M}} \oplus \underline{r}_\lambda^- \quad \text{où } \lambda = s \text{ ou } a \end{aligned}$$

On notera $\pi_{+,a}$ la projection de $\mathcal{G}^\sigma$ sur $\underline{r}_a^+$ parallèlement à $\underline{p}_a^-$ et $\pi_{+,s}$ la projection de $\mathcal{G}^A$ sur $\underline{r}_s^+$ parallèlement à $\underline{p}_s^-$.

1. (a) Montrez que le groupe M opère par la conjugaison sur chacun des espaces $\underline{r}_\lambda^+$, $\lambda = s$ ou a .
(b) Dédurre de (a) que l'application η_a (resp. η_s) $\begin{bmatrix} 0 & 0 \\ C & 0 \end{bmatrix} \mapsto C$ est une bijection linéaire de $\underline{r}_a^+$ (resp. $\underline{r}_s^+$) sur $\mathcal{A}$ (resp. $\mathcal{S}$) qui transforme l'opération de conjugaison de M en l'action de M définie en **I 1**).
On identifiera les orbites X_i (resp. Y_j) aux sous-ensembles correspondant par η_a^{-1} (resp. η_s^{-1}) de $\underline{r}_a^+$ (resp. $\underline{r}_s^+$).

2. On note $\mathbb{O}_k^a$ (resp. $\mathbb{O}_k^s$) l'ensemble des éléments z de $\mathcal{G}^\sigma$ (resp. $\mathcal{G}^A$) de rang $2k$ (resp. de rang k) tels que $z^2 = 0$. Vérifiez que $\mathbb{O}_k^a$ (resp. $\mathbb{O}_k^s$) est stable sous l'action de conjugaison de G^s (resp. G^a).

On note, pour k entier ≥ 1 , V_k^a (resp. V_k^s) l'ensemble des $z = \begin{bmatrix} A & B \\ C & -{}^tA \end{bmatrix} \in \mathbb{O}_k^a$ (resp. $\mathbb{O}_k^s$) vérifiant l'inégalité rang $C \leq 2(k-1)$ (resp. $\leq k-1$).

3. On pose $R^{-,s} = \left\{ \begin{bmatrix} I_n & T \\ 0 & I_n \end{bmatrix}, T \in \mathcal{S} \right\}$, $R^{-,a} = \left\{ \begin{bmatrix} I_n & T \\ 0 & I_n \end{bmatrix}, T \in \mathcal{A} \right\}$.

(a) Vérifiez que $R^{-,s}$ (resp. $R^{-,a}$) est un sous-groupe de G^a (resp. G^s) et qu'il en est ainsi de

$$P^s = MR^{-,s} = \{ZY; Z \in M, Y \in R^{-,s}\} \quad (\text{resp. } P^a = MR^{-,a})$$

(b) Démontrez que V_k^a est stable par l'action de P^a et que V_k^s est stable par l'action de P^s .

VI

1. (a) Soit $z = \begin{bmatrix} A & B \\ C & -{}^tA \end{bmatrix} \in \mathcal{G}^A$, $1 \leq r = \text{rang } B$, $1 \leq u = \text{rang } C$. Montrez qu'il existe $\gamma_1, \gamma_2 \in M$ tels que $\text{Ad } \gamma_1(z) = \begin{bmatrix} A' & B' \\ C' & -{}^tA' \end{bmatrix}$ avec $B' = \begin{bmatrix} I_r & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$, $\text{Ad } \gamma_2(z) = \begin{bmatrix} A'' & B'' \\ C'' & -{}^tA'' \end{bmatrix}$ avec $C'' = \begin{bmatrix} I_u & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$.

(b) On introduit pour un entier $r \geq 1$, la matrice $K_r = \sqrt{-1} J_r$; vérifiez que $K_r^{-1} = K_r$.

Démontrez un résultat parallèle à celui de **VI 1)(a)** faisant intervenir K_r , où $z \in \mathcal{G}^\sigma$ et $2r = \text{rang } B$, $2u = \text{rang } C$.

2. (a) Soit $w = \begin{bmatrix} A' & B' \\ C' & D' \end{bmatrix} \in V_k^s$ où $D' = -{}^tA'$. On suppose dans cette question que B' est de la forme $\begin{bmatrix} I_c & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$ où $c \geq 0$. Montrez que A', C' et D' sont des matrices blocs de la forme suivante:

$$A' = \begin{bmatrix} A_1 & A_2 \\ 0 & A_4 \end{bmatrix} \quad \text{où } A_1 \text{ est une matrice } c \times c, \quad {}^tA_1 = A_1, \quad A_4^2 = 0;$$

$$C' = \begin{bmatrix} C_1 & C_2 \\ C_3 & C_4 \end{bmatrix} \quad \text{où } C_1 = -A_1^2, \quad C_2 = -(A_1A_2 + A_2A_4), \quad C_3 = D_3A_1 - D_4D_3;$$

$$D' = -{}^tA' = \begin{bmatrix} -A_1 & 0 \\ D_3 & D_4 \end{bmatrix}.$$

(b) Démontrez le résultat parallèle à **VI 2) (a)** pour $w \in V_k^a$ et $B' = \begin{bmatrix} K_c & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$, où A_1 est une matrice $2c \times 2c$, ${}^tA_1 = -J_cA_1J_c$, $A_4^2 = 0$;

$$C' = \begin{bmatrix} C_1 & C_2 \\ C_3 & C_4 \end{bmatrix}, \quad \text{où } C_1 = -K_cA_1^2, \quad C_2 = -K_c(A_1A_2 + A_2A_4), \quad C_3 = D_3K_cA_1 - D_4D_3K_c;$$

$$D' = \begin{bmatrix} -K_cA_1K_c & 0 \\ D_3 & D_4 \end{bmatrix}.$$

3. (a) Soient $z = \begin{bmatrix} A & B \\ C & D \end{bmatrix} \in V_k^s$ et $\gamma \in M$; on pose $\text{Ad } \gamma(z) = w = \begin{bmatrix} A' & B' \\ C' & D' \end{bmatrix}$ et l'on suppose que $B' = \begin{bmatrix} I_c & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$ où $c = \text{rang } B \geq 1$.

En écrivant w comme dans la question **VI 2) (a)** sous la forme de blocs 4×4 on a

$$\begin{bmatrix} A_1 & A_2 & I_c & 0 \\ 0 & A_4 & 0 & 0 \\ C_1 & C_2 & -A_1 & 0 \\ C_3 & C_4 & D_3 & D_4 \end{bmatrix}.$$

Démontrez que $c = k$ si et seulement si $A_4 = D_4 = C_4 - D_3 A_2 = 0$.

- (b) Démontrez le résultat parallèle à celui de **VI 3) (a)** pour $z = \begin{bmatrix} A & B \\ C & D \end{bmatrix} \in V_k^a$, $B' = \begin{bmatrix} K_c & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$ où $2c = \text{rang } B$.

VII

On pose, pour $k \geq 1$

$$W_k^s = \left\{ z \in V_k^s, z = \begin{bmatrix} A & B \\ C & D \end{bmatrix} \text{ où } \text{rang } B = k \right\}$$

$$W_k^a = \left\{ z \in V_k^a, z = \begin{bmatrix} A & B \\ C & D \end{bmatrix} \text{ où } \text{rang } B = 2k \right\}$$

On se propose, dans cette question, de démontrer que pour tout $z \in V_k^s$, il existe $\gamma \in P^s$ tel que $w = \text{Ad } \gamma(z)$ appartient à W_k^s . Pour cela, l'on choisit parmi les éléments de $\text{Ad}(P^s)$ un élément $z = \begin{bmatrix} A & B \\ C & D \end{bmatrix}$ de $\mathcal{G}^A$ tel que le rang c de B soit maximum; on va raisonner ensuite par l'absurde en supposant $c < k$ et aboutir à une contradiction.

- Montrez que l'on peut supposer que

$$B = \begin{bmatrix} I_c & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad c \geq 0$$

On va utiliser dans la suite des matrices $\gamma \in R^{-,s}$ de la forme $\gamma = \begin{bmatrix} I_n & T \\ 0 & I_n \end{bmatrix}$, $T = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & T' \end{bmatrix}$, où T' est une matrice symétrique $(n-c) \times (n-c)$ telle que $n-c$ soit supérieur ou égal à 1.

- En conjuguant z par une telle matrice γ et utilisant les notations de **VI 3) (a)** montrez que

$$\text{Ad } (\gamma) z = \begin{bmatrix} A + TC & E \\ C & D - CT \end{bmatrix} \text{ où } E = \begin{bmatrix} I_c & -A_2 T' \\ T' D_3 & T' D_4 - A_4 T' - T' C_4 T' \end{bmatrix}$$

et montrez que la maximalité du rang de B implique que $F = T' D_4 - A_4 T' - T' (C_4 - D_3 A_2) T'$ est nulle.

- (a) En supposant que $A_4 \neq 0$, montrez l'existence d'une matrice inversible g et d'une matrice (éventuellement vide) H telles que

$$g A_4 g^{-1} = \begin{bmatrix} E_{12} & 0 \\ 0 & H \end{bmatrix} \text{ où } E_{12} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$$

et vérifiez que $n-c \geq 2$.

- (b) En déduire, en prenant $T' = g^{-1} \begin{bmatrix} E_{22} & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} t g^{-1}$ et en posant $Y = \begin{bmatrix} E_{11} & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} g$ où

$$E_{22} = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \text{ et } E_{11} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, \text{ que } Y T' = 0, Y F = -Y A_4 T'.$$

- (c) En déduire une contradiction avec le fait que $A_4 \neq 0$.
- (d) Montrez qu'il en résulte que $A_4 = 0$ et $D_4 = 0$.

- En choisissant convenablement la matrice T' , montrez que $X = C_4 - D_3 A_2$ est nulle et conclure.

VIII

Si $2 \leq 2k \leq n-1$, adaptez la preuve de **VII** de façon à prouver que pour tout $z \in V_k^a$ il existe $\gamma \in P^a$ tel que $w = \text{Ad } \gamma(z)$ appartient à W_k^a .

IX

Soit $k \geq 1$. On notera V_k pour V_k^a ou V_k^s et l'on désignera par $\tilde{k}$ le nombre k si $V_k = V_k^s$ et le nombre $2k$ si $V_k = V_k^a$. Démontrez que si

$$z = \begin{bmatrix} A & B \\ C & D \end{bmatrix}$$

appartient à V_k , alors $\text{rang } A < \tilde{k}$.

*Les résultats des parties **VII**, **VIII**, **IX** interviennent dans la classification de certaines représentations d'algèbres de Lie.*