

Remarques détaillées sur les Epreuves Orales

1. COMPORTEMENT GÉNÉRAL EN ALGÈBRE ET ANALYSE

1.1. **Plan et la défense:** Dans l'ensemble, les plans photocopiés donnent satisfaction. Ils sont bien écrits, tiennent en 3 pages comme demandé. Précisons, que le candidat doit laisser **une marge pour la photocopie de 1 cm environ**. Ce n'est pas toujours le cas, bien que cela soit rappelé aux candidats lors des tirages. Les photocopies sont alors souvent coupées... ce qui nuit à la compréhension du jury.

Nous confirmons que le plan doit tenir en 3 pages maximum, et que la limite de deux pages n'est pas exigée.

Principaux Défauts:

- Le candidat relit de manière monotone son plan in extenso, avec tous les détails. Cela n'a pas grand intérêt, car le jury dispose déjà de la copie du texte.
- es plans qui se veulent exhaustifs. On rappelle que ce n'est pas le but de cette épreuve et que cela nuit certainement au candidat, car il est alors très difficile de dégager des grands axes de synthèse ou de mettre en valeur le travail de réflexion personnelle du candidat. Mieux vaut faire des choix et les expliquer.
- Le candidat n'arrive pas à faire une synthèse, ni à mettre en perspective résultats et méthodes. Il ne décolle pas de son plan qu'il a souvent recopié ou appris lors de la préparation.

Principales Qualités:

- Le candidat fait une synthèse de son texte, sans s'attarder sur les détails inutiles ou élémentaires. Il explique les résultats importants, ajoute oralement des précisions qui ne figurent pas dans le texte. Par exemple, il explique que l'hypothèse du théorème est nécessaire un citant un contre-exemple. Bref, le plan semble maîtrisé. Il prend la craie pour expliquer un exemple pertinent, sans perdre de temps. Il explique comment utiliser ses résultats pour résoudre d'autres problèmes mathématiques.
- Le candidat explique l'articulation de son plan, la finalité et les difficultés principales rencontrées. Il fait part de ses réflexions sur le sujet et la manière dont il a compris les choses.

Cette année, et mieux que les années précédentes, la quasi-totalité des candidats présentent leur plan en 8 mn. Ce qui montre qu'ils sont dans l'ensemble bien préparés.

1.2. **Développement.** Il importe que tous les (2 ou 3) développements proposés soient en rapport avec le sujet de la leçon. Le hors-sujet est pénalisé, et le jury tient à disposer d'une possibilité réelle de choisir parmi les propositions.

Le jury constate une recrudescence dans les développements de la tactique consistant à isoler le point difficile dans un lemme préliminaire admis, c'est à dire dont le candidat ne propose pas la démonstration. Le jury sanctionne sévèrement cette pratique, dans la mesure où elle tend à vider le développement de sa substance.

Les développements sont souvent trop peu structurés. Le jury préfère que les candidats commencent par expliquer la stratégie de preuve et les principaux résultats intermédiaires structurant la démonstration.

Le jury et les préparateurs apprécient les développements élégants et techniques. Toutefois, il est regrettable que des candidats qui ne possèdent pas l'assurance et la maîtrise du sujet essaient de les reproduire, alors qu'ils sont trop sophistiqués pour leurs moyens. Le résultat est souvent décevant. Les préparateurs devraient permettre aux candidats d'évaluer leurs capacités et les entraîner à présenter des développements où ils soient à l'aise, d'un niveau suffisant. Un exemple de cette situation concerne les développements sur les invariants de similitude.

1.3. Préparation. Comme les années passées, des candidats que l'on devine brillants font trop confiance en leurs moyens intellectuels et pensent que trois heures de préparation peuvent remplacer la maturité qui s'acquiert par une préparation méthodique.

2. ORAL D'ALGÈBRE

2.1. Généralités. Beaucoup d'énoncés demandent des "exemples d'application". On constate malheureusement que peu de plans fournissent ces exemples.

2.2. Structures algébriques.

- (1) D'une manière générale, les leçons sur les groupes sont plutôt bien traitées. Par contre, les plans d'algèbre linéaire sont souvent recopiés et mal maîtrisés; ceux sur les polynômes manquent de substance.
- (2) Certaines notions sur les groupes (produit semi-direct, groupes résolubles), qui ne paraissent pas comprises voici deux ou trois ans, sont maintenant mieux connues des candidats.
- (3) Un homomorphisme d'anneaux $\phi : A \rightarrow B$ envoie, **par définition**, l'élément unité de A sur celui de B . On peut alors trouver sans difficulté tous les homomorphismes d'anneaux de $\mathbb{Z}/mn\mathbb{Z}$ dans $\mathbb{Z}/m\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$.
- (4) Si on parle "du" groupe diédral, il faut être capable d'en proposer une caractérisation.
- (5) Dans la leçon sur les corps finis, les candidats confondent parfois \mathbb{F}_q et \mathbb{F}_p avec p premier et $q = p^n$. Certains résultats relatifs à \mathbb{F}_p (comme la description des carrés) sont adaptés imprudemment à \mathbb{F}_q . Il serait bon de préciser dans quel circonstances on peut assimiler \mathbb{F}_q à un sous-corps de $\mathbb{F}_{q'}$.
- (6) Si l'on termine la leçon "Corps finis" par l'énoncé du théorème de Wedderburn, il faut s'assurer qu'on ne l'a pas utilisé avant. Il est fréquent qu'un énoncé précédent décrive "tous" les corps finis.
- (7) Si l'on a décrit tous les corps finis, il faut être capable de présenter explicitement un corps à 9 éléments, ainsi que de décrire \mathbb{F}_4 et \mathbb{F}_8 .
- (8) La construction explicite des tables additives et multiplicatives des corps $\mathbb{F}_4, \mathbb{F}_8, \dots$ n'est pas sans intérêt, notamment en vue des applications en codage et cryptographie.
- (9) Pour traiter des corps finis, il est inutile de plonger d'emblée un tel corps dans une extension algébriquement close. Si on le fait, il faut donner quelques arguments pour l'existence d'une telle extension. Il faut pouvoir énoncer un résultat d'unicité "du" corps de décomposition d'un polynôme.
- (10) Pour la leçon "Nombres premiers" il faut prendre garde aux prérequis et à l'ordre d'introduction des notions et résultat.
- (11) Le candidat doit connaître les polynômes irréductibles sur \mathbb{R} et savoir exprimer $\text{Im}(z)$ en termes de z et \bar{z} .
- (12) Il n'est pas nécessaire d'invoquer les théorèmes de Sylow pour montrer qu'un sous-groupe distingué de A_5 qui contient un 5-cycle contient tous les 5-cycles. Il faut pouvoir dire combien de classes de conjugaison de 5-cycles A_5 possède.
- (13) La leçon sur $k[X_1, \dots, X_n]$ est très mal traitée: le théorème de structure sur les polynômes symétriques est souvent énoncé de manière imprécise et sans aucune application. Quand sa preuve est proposée, elle est presque toujours entachée d'erreurs. Les sommes de Newton

sont rarement connues, tout comme les propriétés arithmétiques de $k[X_1, \dots, X_n]$ par rapport à $k[X]$.

2.3. Algèbre Linéaire.

- (1) Une matrice diagonalisable n'est pas forcément une matrice diagonale. Le jury n'a pas de difficulté pour montrer que le théorème de Dunford ne facilite pas le calcul de l'exponentielle d'une matrice.
- (2) Trop de candidats confondent encore la réduction de Gauss de formes quadratiques avec la diagonalisation de la matrice associée à la forme.
- (3) Si $A \in M_n(\mathbb{R})$ est une matrice nilpotente, on peut justifier l'égalité $\exp(\ln(I_n + A)) = I_n + A$ sans passer par une équation différentielle. Les candidats ne pensent pas à exploiter la théorie des développements limités. Beaucoup de candidats ne parviennent pas au résultat.
- (4) A propos de la leçon "Endomorphismes nilpotents", de nombreux candidats exposent une version incomplète de la réduction de Jordan tirée d'un ouvrage de grande diffusion. Ceci provoque des catastrophes lorsqu'on leur demande de dire si les matrices

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

sont semblables.

- (5) A propos d'endomorphismes nilpotents, les candidats devraient être capables de faire le lien entre la forme de Jordan et les noyaux emboîtés.
- (6) L'énoncé du théorème de Jordan ne devrait jamais être omis des leçons sur les endomorphismes nilpotents. Dans cet énoncé, il faut préciser la structure en terme de blocs de

$$\text{Jordan } J_n = \begin{pmatrix} 0 & 1 & & \\ & 0 & \ddots & \\ & & \ddots & 1 \\ & & & 0 \end{pmatrix} \quad \text{et non en se contentant d'indiquer que la première} \\ \leftarrow 1..n \rightarrow$$

diagonale supérieure est remplie de 0 et de 1 sans autre précision.

- (7) Les exposés sur la réduction des endomorphismes gagneraient à être illustrés par des exemples matriciels judicieusement choisis, c'est-à-dire d'une taille suffisante pour être révélateurs.
- (8) Les candidats butent très souvent sur la diagonalisabilité éventuelle des rotations planes.
- (9) A propos de la leçon sur les formes quadratiques, le jury regrette que les candidats se limitent le plus souvent au cas où \mathbb{R} est le corps sous-jacent ou aux espaces euclidiens. Le contexte plus général des corps commutatifs de caractéristique distincte de 2 devrait être traité.
- (10) La géométrie a de nombreuses relations avec l'algèbre linéaire. Ceci n'apparaît pas suffisamment dans les plans proposés.
- (11) Certains candidats paraissent avoir fait des impasses importantes sur des pans entiers du programme, apparemment sûrs de tirer au moins une leçon d'algèbre linéaire. Certains couplages ne comportaient pas d'algèbre linéaire, et le jury tient à rappeler que son objectif est de tester la maîtrise de l'ensemble du programme par les candidats.

2.4. Géométrie. Les jurys ont un préjugé favorable à l'égard des rares candidats qui présentent une leçon de géométrie. Il regrette toutefois le manque de précision dans les plans et les développements.

Un sujet aussi vaste que les coniques nécessite que l'on restreigne son propos. Il n'est pas possible de faire le tour de la question en trois pages.

3. ORAL D'ANALYSE ET PROBABILITÉS

3.1. Généralités. Le niveau général des leçons d'analyse reflète une bonne préparation des candidats. On relève notamment les points positifs:

- Les candidats ont plus que par le passé le souci d'illustrer les leçons dont le libellé indique "exemple et applications". Certains développements placent le thème de la leçon "en situation", et l'enrichissent ainsi, même lorsqu'elle est consacrée à des notions de base (prolongement d'applications, intégrales dépendant d'un paramètre, espaces complets, méthodes hilbertiennes, bases hilbertiennes,...). On regrette toutefois la disparition des exemples empruntés aux équations aux dérivées partielles simples (équation de la chaleur, des ondes, du pendule,...)
- Les plans sont en général conçus avec un souci de cohérence bien défendu.

Toutefois les remarques suivantes indiquent des directions dans lesquelles les candidats devraient essayer d'améliorer leurs connaissances et leurs prestations:

- (1) Le jury constate que trop peu de plans sont défendus. La plupart des candidats lisent mot à mot leur plan photocopié, ou le survolent de façon trop sommaire à grande vitesse. A l'inverse, le jury apprécie que les candidats mettent en évidence les idées qui ont guidé la construction de leur plan et qu'ils mettent en lumière les hypothèses clé des résultats mentionnés.
- (2) L'illustration d'un raisonnement par un dessin ou par un diagramme manque souvent cruellement, et c'est fort dommage.
- (3) Les candidats devraient s'attacher à présenter l'idée clef ou la démarche qui sous-tend leur développement dès le début, de manière synthétique. Ceci améliorerait grandement l'aspect didactique de leur prestation.
- (4) Souvent un développement trop ambitieux, pour lequel le candidat manque manifestement de recul, est proposé et n'aboutit pas. Il faudrait conseiller aux candidats des développements plus élémentaires, qui mieux maîtrisés et conduits, seront mieux jugés.
- (5) A l'inverse, certains candidats moyens ont tendance à choisir la leçon la plus élémentaire d'un couplage et de plus la traitent à un niveau trop élémentaire. Dans le cas du couplage "séries numériques" et "étude de courbes", le choix typique est "série numérique". Pour traiter cette dernière leçon au niveau du concours d'agrégation, on peut inclure: inégalité de Carleman, séries trigonométriques, Euler Mac Laurin à l'ordre 1 ou 2, ...
- (6) La durée du développement ne peut être étendue au delà de 15 minutes, même si le développement est (trop) substantiel.
- (7) Il paraît nécessaire d'insister sur le fait que tous les résultats figurant dans le plan doivent être compris du candidat.
- (8) Les candidats gagneraient à plus utiliser le tableau pendant le dialogue avec le jury, pour s'aider à répondre aux questions.
- (9) Les candidats qui utilisent des techniques inusuelles pour insérer leur exposé dans un contexte didactique particulier, gagnent à exposer leur motivation et leur approche en préalable. Ainsi, le candidat qui a utilisé une preuve longue et complexe de la croissance de $(1 + \frac{1}{n})^n$, dont l'intérêt résidait dans le fait qu'elle n'utilisait que les outils disponibles en classe de terminale, eut gagné à préciser sa motivation.

En outre, les candidats doivent rechercher des références adaptées à leur prestation: il ne s'agit ni de présenter des plans spectaculaires que l'on ne maîtrise pas, ni de présenter des résultats simples par des méthodes lourdes et inadaptées. Ils doivent prendre assez de recul pour éviter de reproduire sans esprit critique les expositions inexactes qu'ils peuvent trouver dans la littérature.

3.2. Aspects scientifiques et techniques.

- (1) Les leçons sur les problèmes d'interversion de limites, ou de limites et d'intégrales, ne doivent pas se limiter à un catalogue de théorèmes assortis de quelques exemples triviaux. Le jury attend que le candidat montre son aptitude à faire de l'analyse en appliquant les théorèmes du plan à des exemples suffisamment consistants.

- (2) Dans la leçon “fonctions monotones, fonctions convexes”, les candidats ne font jamais le lien entre les deux notions.
- (3) Dans les leçons sur les équations différentielles linéaires, les candidats omettent fréquemment de mentionner la dimension de l’espace affine des solutions. Lorsqu’ils citent ce résultat, ils ne savent pas toujours le déduire du Théorème de Cauchy-Lipschitz.
- (4) On constate que souvent les leçons relevant de l’analyse numérique, ou les développements qui en sont inspirés ne présentent pas suffisamment tôt l’idée clef qui motive la démarche. Par exemple, dans les développements touchant à la méthode de Newton, du gradient,... gagneraient à être accompagnées de figures permettant de dégager la démarche.
- (5) La vision géométrique reste toujours au second plan. Pour des applications de $U \subset \mathbb{R}^n$ à valeurs dans \mathbb{R}^m , beaucoup de candidats pensent que “a critique” signifie que $df(a) = 0$ et non $\text{rang}(df(a)) < m$. Les lemmes de Sard et Morse offrent d’intéressants développements aux bons candidats.
- (6) Les exemples classiques sont maintenant mieux placés dans leur contexte et apparaissent moins artificiels. Cependant, certaines leçons d’exemples, prises à un niveau très élémentaire, font apparaître un plan non structuré, consistant en une simple liste d’exemples sans fil directeur.
- (7) Les leçons “Courbes” et “Etude locale de surfaces” sont malheureusement évitées le plus souvent par les candidats.
- (8) Les leçons liées aux fonctions holomorphes sont prises assez fréquemment, souvent par de bons candidats qui les exploitent intelligemment.
- (9) Les leçons sur la transformation de Fourier ne doivent pas omettre la théorie L^2 .
- (10) Le cadre naturel de l’égalité de Parseval est l’espace de Hilbert $L^2_{2\pi}(\mathbb{R}, \mathbb{C})$ plutôt que l’espace dit “de Dirichlet” $E_{2\pi}$, souvent utilisé par les candidats.

4. ORAL DE MODÉLISATION

4.1. Epreuve orale de Modélisation.

D’une manière générale, on constate que les candidats sont maintenant bien préparés à cette épreuve. Toutefois, l’épreuve reste exigeante car elle demande un certain recul par rapport aux connaissances acquises et met particulièrement en avant l’utilisation de résultats en “aval” des développements théoriques usuels.

On doit conseiller aux candidats de mieux faire la distinction entre le processus de “Modélisation” et celui de “Simulation”. Toutefois, la discussion de propriétés quantitatives des modèles aboutit très fréquemment à une simulation qu’il s’agit alors de bien conduire.

4.1.1. Calcul Scientifique.

Comme l’an passé, les connaissances de nombreux candidats dans le domaine des méthodes numériques et de l’algèbre linéaire se sont souvent révélées insuffisantes. Par exemple, certains candidats concernés ont été en peine de traiter de manière satisfaisante la méthode d’Euler d’approximation de systèmes d’équations différentielles ordinaires.

Concernant l’étude des équations différentielles, on constate que de plus en plus de candidats n’en maîtrisent pas les bases. Ainsi, il est indispensable que tous les candidats connaissent parfaitement le théorème de Cauchy-Lipschitz, comprennent l’articulation entre l’étude locale et globale des solutions, et puissent étudier la stabilité autour d’un point fixe.

Ainsi que l’on peut s’y attendre, le calcul différentiel est un outil important dans l’étude de nombreux modèles mathématiques. Il est donc essentiel que les candidats y accordent une attention soutenue, dès l’étude des programmes de licence et de maîtrise. Les points suivants, qui devraient être acquis au niveau de la licence, continuent à présenter des difficultés:

- utilisation de la différentielle d’une fonction de $\mathbb{R}^d \Rightarrow \mathbb{R}^d$ dans la méthode de Newton,
- rapport entre différentielle et gradient, signification géométrique du gradient (surfaces, courbes de niveau).
- application du théorème des fonctions implicites,

Sur les points suivants, les candidats devraient être mieux exercés à mettre en relations propriétés locales et globales:

- notion de convexité (parties de \mathbb{R}^n , fonctions de variables réelles), et son utilisation dans les problèmes de minimisation.
- existence locale et prolongement des solutions d'équations différentielles ordinaires.

L'analyse numérique est moins bien acquise que par le passé, entraînant des performances médiocres sur des questions faciles:

- analyse numérique linéaire, allant de la résolution des systèmes à la réduction des opérateurs linéaires,
- algorithmique non linéaire, par exemple méthode de Newton,
- schémas de résolution d'équations différentielles ordinaires.

4.1.2. *Probabilités et Statistiques.*

Il est indispensable que tous les candidats qui choisissent cette option aient assez de recul pour pouvoir expliquer de manière convaincante les notions de base. Par exemple ce qu'est une variable aléatoire.

Concernant les chaînes de Markov, il importe que les candidats sachent faire la classification des états, sur des exemples simples. Le jury a constaté cette année encore des réponses absurdes. Les préparateurs aideront les candidats en leur présentant des exemples concrets simples.

Parmi les notions mal maîtrisées, figurent également les tests statistiques, l'utilisation dans le contexte probabiliste des convolutions et fonctions génératrices.

Les textes et leçons faisant intervenir des vecteurs gaussiens (lois normales multidimensionnelles) se sont révélés un test exigeant des connaissances en algèbre linéaire des candidats, et de leur capacité à les appliquer. Les points suivants en sont des exemples:

- réduction de formes quadratiques en relation avec la simulation de vecteurs gaussiens dont la matrice de covariance est donnée,
- utilisation de la réduction des formes quadratiques, et plus précisément de la détermination des axes d'un ellipsoïde, dans l'analyse en composantes principales d'une loi normale multidimensionnelle,
- utilisation des notions liées à la projection orthogonale, par exemple dans les méthodes de moindres carrés et celles d'analyse en composantes principales.
- utilisation de la réduction des matrices et plus particulièrement du théorème de Perron-Frobenius dans l'étude des chaînes de Markov à espace d'états fini.