

La partie I a permis à tous les candidats de s'exprimer. Tout candidat ayant préparé l'agrégation aurait dû savoir la traiter sans erreur.

Pour les questions I.2.a et I.2.b, beaucoup de candidats ont à bon escient construit un tableau de variations. Mais signalons de trop fréquentes erreurs dans le calcul de dérivées ! Ces erreurs ont été sévèrement sanctionnées. Signalons aussi que pour la question de démarrage, on attendait l'utilisation de critères simples, et pas le retour aux racines de la convexité.

La question I.3 requiert un minimum de familiarité avec l'intégrale de Lebesgue sur les réels. La question I.3.a a en général été traitée correctement. Par contre la question I.3.b, abordée par une grande majorité des candidats, s'est révélée très sélective. On note beaucoup d'erreurs élémentaires concernant l'emploi de  $a_+$ ,  $a_-$  et  $|a|$ . De nombreux candidats ont construit de faux raisonnements pour montrer qu'ici on avait ici  $\sup_{0 \leq f \leq 1} |A(f)| = \sup_{0 \leq f \leq 1} A(f)$ . L'idée d'introduire  $f = \mathbf{1}_{q \geq r}$  a rencontré davantage de succès.

La partie II a permis elle aussi à presque tous les candidats d'accumuler des points, et a été sélective. La question II.1 a permis de vérifier la compréhension de la notion de "presque partout". Rappelons que les densités  $\ell_i$  et  $k_i$  ( $i=1, 2$ ) ne sont pas nécessairement bornées, et que par conséquent on ne peut pas choisir  $f = \ell_i - k_i$ , comme cela a été fait assez régulièrement.

La question II.2 a testé la compréhension de ce qu'est une CNS. On y attendait une démonstration de ce que les conditions  $\phi \geq 0$  p.p. et  $\psi \geq 0$  p.p. sont nécessaires. Cette attente a bien souvent été déçue.

Les questions II.3 et II.4 demandent une bonne compréhension de l'énoncé, ainsi qu'un peu de dynamisme. Pour II.3.a, relativement peu de candidats ont pensé à introduire  $h(x, y) = f(x) - f(y)$ ,  $f$  étant une fonction quelconque à valeurs dans  $[0, 1]$ , puis à utiliser la positivité de  $\Pi$ . Quant à II.3.b, il fallait vérifier que  $\Lambda_0$  est bien une forme linéaire positive telle que  $\Lambda_0(\mathbf{1}) = 1$ , puis calculer ses densités marginales, et enfin calculer  $\Lambda_0(\mathbf{1}_{x \neq y})$ . On devait utiliser l'identité  $\min(a, b) + [a - b]_+ = a$ . Pour être complet dans II.3.c, il aurait fallu montrer que (12) restait vraie dans le cas  $d_{VT}(q, r) = 0$ , même si l'énoncé suggérait implicitement, en raison de la formulation de la question II.3.b, de se limiter au cas  $d_{VT}(q, r) > 0$ .

Pour II.4, il fallait prendre l'initiative d'utiliser l'inégalité de Cauchy-Schwarz pour les intégrales : trop peu de candidats ont mené à bien le traitement de cette question, qui est pourtant plutôt facile.

La partie III est une partie autonome contenant des questions de théorie des probabilités. La plupart des candidats l'ont abordée. L'inégalité de Chernoff est admise et rappelée. Son utilisation, combinée avec le passage à la valeur absolue, est simple mais demande un peu de savoir-faire. Des questions préparatoires utilisent des séries entières et la convexité, et testent des connaissances élémentaires sur les équations différentielles et l'analyse asymptotique. Ces questions préparatoires (III.1.a et b, III.2.a et b) n'ont aucun rapport avec la théorie des probabilités. Elles ont été redoutablement sélectives. La question III.2.c est nettement plus difficile.

Rappelons, à propos de la question III.1.a, que les rayons de convergence du développement en série entière de  $\exp(\lambda^2/2)$  et  $\operatorname{ch} \lambda$  sont infinis, et qu'il ne faut pas confondre développement en série entière et développement limité... La question III.1.b a donné lieu à un surprenant phénomène collectif : de très nombreux candidats ont cru qu'il fallait ici aussi comparer des développement en série entière. Malheureusement, ils ont alors appuyé leur comparaison sur la proposition : " $\forall n \in \mathbb{N}^*$ ,  $\forall x \in [-1, 1]$ ,  $x^n \leq x$ ". Mais l'inégalité est fautive lorsque  $-1 \leq x < 0$  et  $n$  impair ! L'argument de convexité n'a été proprement utilisé que dans une minorité de copies.

Dans les questions III.1.c, d et e, on ne suppose pas que la loi de  $X_i$  admet une densité par rapport à la mesure de Lebesgue. On conclut III.1.c en considérant la probabilité de la réunion de

deux événements, d'où le facteur 2, ce qui n'a été clairement explicité que relativement peu souvent. Dans III.1.d, quelques candidats ont judicieusement pensé à indiquer que le trinôme du second degré  $-\lambda^2/2 + \lambda a$  atteint son maximum en  $\lambda = a$ , où il vaut  $a^2/2$ , et que c'est là la raison de ce choix de  $\lambda$ . Dans III.1.e, des candidats ont envisagé d'appliquer l'inégalité (20) à la variable aléatoire centrée  $Z = n^{-1/2} \sum_{i=1}^n X_i$ , mais elle prend ses valeurs dans l'intervalle  $[-\sqrt{n}, \sqrt{n}]$  et ne vérifie donc

pas les hypothèses de III.1.d. D'autres ont appliqué l'inégalité (20) à  $\bar{X} = n^{-1} \sum_{i=1}^n X_i$ , qui vérifie les hypothèses. Mais cela les conduisait à

$$\mathbb{P}\{|Z| \geq a\} \leq 2 \exp\left(-\frac{a^2}{2n}\right) \text{ avec } n \geq 1,$$

ce qui ne convenait pas puisque  $\exp(-a^2/2n) \geq \exp(-a^2/2)$  pour  $n \geq 1$ . D'autres encore ont essayé de suivre les pistes partant de  $\mathbb{P}\{|\sum_{i=1}^n X_i| \geq a\} \leq \mathbb{P}\{\sum_{i=1}^n |X_i| \geq a\}$ , mais leurs chemins se

sont ensablés : par exemple, il est *faux* que  $\mathbb{P}\{\sum_{i=1}^n |X_i| \geq a\} \leq \mathbb{P}(\cap_{i=1}^n \{|X_i| \geq a\})$  ! Ou encore,

s'il est vrai que  $\mathbb{P}\{\sum_{i=1}^n |X_i| \geq a\} \leq \mathbb{P}(\cup_{i=1}^n \{|X_i| \geq a/n\})$ , cela ne conduit via (20) qu'au majorant  $2n \exp(-a^2/2n)$ .

À la question III.2.a, on attendait que les candidats reconnaissent une équation différentielle linéaire homogène d'ordre 1, et en déduisent directement la structure de l'ensemble des solutions, quitte à introduire le facteur intégrant  $\exp(x^2/2)$ . Or trop souvent on a seulement pu lire des réponses qui suivaient le schéma  $y'/y = -x$  donc  $\ln|y| = -x^2/2 + \text{cte}$  (la valeur absolue n'étant pas toujours présente !), donc  $y = C \exp(-x^2/2)$ , parfois agrémenté de l'évocation (ou de l'invocation) du théorème de Cauchy-Lipschitz, mais sans indication précise.

La question d'analyse asymptotique III.2.b a donné lieu à toutes sortes de graves erreurs. Typiquement : après intégration par parties, il s'agit de montrer que

$$\int_x^{+\infty} \frac{e^{-t^2/2}}{t^2} dt = o\left(\int_x^{+\infty} e^{-t^2/2} dt\right)$$

quand  $x \rightarrow +\infty$ , ce qui est beaucoup plus exigeant que de montrer seulement que cette intégrale tend vers 0. Il est très surprenant de trouver autant de candidats à l'agrégation de mathématiques qui croient que pour montrer que  $u \sim v$ , il suffit de montrer que  $u - v$  tend vers 0. De telles lacunes sont graves.

La question III.2.c a été assez largement abordée, mais elle n'a été traitée correctement que dans un très petit nombre de copies. Les candidats qui ont abordé cette question ont en général compris que le théorème de la limite centrale (curieusement appelé "loi des grands nombres" dans quelques copies) était en jeu. Mais la question de la variance a beaucoup trop souvent été oubliée,

comme si  $n^{-1/2} \sum_{i=1}^n X_i$  convergeait en loi vers  $\mathcal{N}(0, 1)$  dans tous les cas. Il fallait en fait considérer

des variables aléatoires  $X_i$  à valeurs dans  $[-1, 1]$ , indépendantes et de même loi, centrées et de variance 1. Or, il n'était pas donné a priori que de telles variables aléatoires existent : il fallait en construire. D'autre part, il n'était pas question de partir de variables aléatoires  $X_i$  gaussiennes de loi commune  $\mathcal{N}(0, 1)$ , ce qui a été proposé plus d'une fois, puisqu'on exigeait que  $-1 \leq X_i \leq 1$ . Enfin, rappelons que la loi d'une variable aléatoire réelle n'a pas toujours une densité par rapport à la mesure de Lebesgue, et que l'incompatibilité de deux événements n'est pas l'indépendance !

Peu de candidats ont abordé de manière substantielle les parties IV et V. Souvent, ils n'ont pas eu le temps de dépasser IV.1.a et b. Parmi ceux qui ont cherché à traiter la question IV.1.a, beaucoup ont fait des erreurs de signe (par exemple, lors de la multiplication des deux membres d'une inégalité par une quantité négative) qui ont invalidé leur solution. Quelques-uns ont trouvé le temps de traiter correctement plusieurs questions de IV et de V. La question IV.4, très technique et donc longue à rédiger en détail, surtout en fin d'épreuve, n'a été traitée complètement que dans deux ou trois excellentes copies.

## Conclusion

Une fois de plus, on constate qu'à côté d'une minorité de bonnes, très bonnes et excellentes copies, la majorité des candidats à l'agrégation manquent de pratique et d'autonomie. Ils ne sont pas habitués depuis le DEUG à faire, seuls ou en petits groupes, des exercices et des problèmes pour s'entraîner. C'est pourtant la seule manière d'apprendre l'*artisanat mathématique*, d'en acquérir les savoir-faire et les tours de main. On constate aussi le manque de familiarité de cette majorité de candidats avec les équations différentielles ordinaires, l'analyse asymptotique élémentaire et les bases du calcul différentiel des fonctions de plusieurs variables. Il faudrait que les étudiants en licence et maîtrise soient mieux encadrés et disposent de quantités suffisantes d'heures de TD (ou toute autre forme d'encadrement donnant accès à la pratique) afin de devenir capables de *mettre en œuvre* les méthodes qui leur sont exposées en cours.

## Bibliographie

L'énoncé a été élaboré à partir de l'article

P.-M. Samson, Concentration of measure inequalities for Markov chains and  $\phi$ -mixing processes. *The Annals of Probability* **28**-1, 416–461, 2000.

Sur le même sujet, mais avec de nouvelles techniques, doit paraître

P.-M. Samson, Concentration of measure inequalities for convex functions on product spaces. Dans *Stochastic Inequalities and Applications, Proceedings of the Euroconference in Barcelona (June 2002)*, Birkhäuser.

On peut conseiller les deux ouvrages de synthèse

*Sur les inégalités de Sobolev logarithmiques*. Panoramas et Synthèses **10**, S.M.F., 2001.

M. Ledoux, *The Concentration of Measure Phenomenon*. Mathematical Surveys and Monographs, Vol. **89**, American Mathematical Society, 2001.