

Commentaires sur l'épreuve écrite de Mathématiques Générales

I) Commentaire général

L'idée de départ était de démontrer le résultat suivant, dû à C. Jordan : pour tout entier $n \geq 2$ il existe un entier $a(n)$ tel que tout sous-groupe fini de $GL_n(\mathbb{C})$ possède un sous-groupe abélien distingué d'indice au plus $a(n)$.

La première partie permet de se ramener à des sous-groupes finis du groupe unitaire U_n . La partie II traite le cas où n vaut 2. On montre l'existence d'un homomorphisme de groupes $\varphi : SU_2 \rightarrow SO_3$, surjectif de noyau $\{\pm 1_2\}$; comme dans l'espace vectoriel euclidien \mathbb{R}^3 il existe un icosaèdre régulier centré en 0, dont le groupe des isométries positives est isomorphe au groupe simple A_5 , on en déduit que $a(2)$ vaut au moins 60. On étudie ensuite l'action d'un sous-groupe fini G de U_2 sur l'ensemble des droites propres des éléments non scalaires de G , et on montre qu'on peut effectivement prendre $a(2) = 60$. La discussion est parallèle à celle qui permet de classifier les sous-groupes finis de SO_3 ; la raison en est bien sûr l'existence de l'homomorphisme φ .

La troisième et dernière partie porte sur le théorème de Jordan proprement dit, par une méthode due à Frobenius (voir l'article *Über unitäre Matrizen*, publié en 1911 aux comptes-rendus de l'Académie des Sciences de Berlin). On peut donner une démonstration plus directe, qui évite pour l'essentiel la partie III A; on se reportera au livre de M. Alessandri qui figure dans la bibliothèque de l'agrégation. Cependant les résultats précis de III A sur les commutateurs d'éléments du groupe unitaire ont un intérêt propre, et permettaient de manier plusieurs notions et résultats de base du programme.

Mentionnons aussi que la valeur de $a(n)$ obtenu en III.B.3 n'est, bien sûr, pas la valeur optimale; mais on ne connaît cette valeur optimale que pour les petites valeurs de n .

En gros, les parties I, II A, II B, III A, III B étaient de difficulté croissante, et de même les questions croissaient en difficulté à l'intérieur de ces parties. En particulier les 4 premières questions du I sont très souvent traitées en DEUG ou en licence, de même que les premières questions de II A; les trois premières questions de II B ressortaient du cours sur les actions de groupes ou en étaient des applications directes. Le jury a constaté que beaucoup de candidats ne maîtrisent pas assez leur sujet pour traiter correctement ces questions de base : la question I.2 a été particulièrement discriminante. S'il y a très peu de copies blanches, beaucoup sont vraiment trop minces, trop confuses ou trop erronées. Heureusement certains candidats vont à l'essentiel sans délaiage, et plusieurs ont réussi à traiter tout le problème.

II) Commentaires plus précis sur les diverses questions

Première partie

I 1 a) On trouve parfois, trop souvent, la formule $T_\lambda = vU_\lambda v^{-1}$, qui n'a pas de sens. Ou pouvait raisonner par équivalence pour prouver l'égalité $T_\lambda = v(U_\lambda)$, mais il est alors difficile d'être entièrement correct ; il vaut mieux prouver chacune des deux inclusions.

I 1 b) Dans nombre de copies on refait la démonstration de I 1 a) au lieu de l'utiliser.

I 1 c) Ici, il est clair qu'il faut **démontrer** que la restriction d'un endomorphisme diagonalisable à un sous-espace stable est encore diagonalisable. Trop de candidats, au lieu d'utiliser le polynôme minimal, manipulent des bases mystérieusement, et supposent implicitement qu'un supplémentaire est stable.

I 2 Une bonne part de ceux qui ont oublié le polynôme minimal à la question précédente s'en servent correctement ici. Mais il faut prendre garde que $X^n - 1$ n'est pas nécessairement le polynôme minimal d'un élément d'ordre n .

I 3 Il s'agit là encore d'un exercice classique, mais beaucoup se contentent du cas d'une famille à 2 éléments ; le cas d'une famille finie nécessite autant de soin, pour la récurrence, que celui d'une famille quelconque.

I 4 Même quand un exemple est trouvé, les justifications sont souvent incomplètes. Noter que le sous-groupe $SO_2(\mathbb{R})$ de $GL_2(\mathbb{C})$ est diagonalisable grâce à la question précédente !

I 5 Il fallait penser à faire une moyenne. C'est un procédé général pour obtenir une invariance, mais les candidats ne l'ont peut-être pas rencontré assez fréquemment.

I 6 On peut raisonner en termes d'endomorphismes ou de matrices, mais il faut donner un raisonnement complet. On trouve beaucoup de changements de base pour la forme hermitienne, ce qui ne donne pas forcément la conjugaison voulue.

Deuxième partie

II A 1 a) Nous avons eu des réponses très diverses à cette question presque immédiate : de 1 à $255 = 16^2 - 1$.

II A 1 b) Il ne suffit pas de prouver que q est homogène de degré 2 pour que q soit une forme quadratique.

II A 1 c) Il ne suffit pas de dire "formule de polarisation", il faut effectuer cette polarisation.

II A 2) Souvent bien traitée, même si certains passent beaucoup de temps à justifier que la trace est invariante par conjugaison.

II A 3) Question très facile.

II A 4 a) Il ne suffit pas de dire qu'il s'agit de l'ensemble des $a \in U(V)$ qui commutent avec tout élément de E , il faut identifier ces éléments a .

b) On ne peut parler d'un couple (axe, angle) d'une rotation de E qu'après avoir orienté E , et un axe est une droite orientée; l'orientation de E et celle de l'axe permettent d'orienter le plan orthogonal à l'axe et de définir l'angle de la rotation. La trace de la rotation est $1 + 2 \cos \theta$ où θ est l'angle, mais cela ne détermine pas θ .

II A 4 c) La question précédente donne tous les arguments mais peu l'ont traitée.

II B 1 a) Il y a bien des confusions et l'on se demande ce que signifie G/Z pour certains candidats. Il faut préciser que le complémentaire de Z est stable par conjugaison.

II B 1 b) Il faut ou bien définir une action de G et passer au quotient par Z qui est dans le noyau de $G \rightarrow S_{\mathcal{D}}$, ou bien définir $H \times \mathcal{D} \rightarrow \mathcal{D}$ et vérifier que c'est bien une action.

II B 2 a) Certains disent que si g est dans le stabilisateur, il en est de même de g^{-1} ; hélas il peut arriver qu'on ait $g = g^{-1}$!

II B 2 b) On devine que les candidats ont senti que l'on comptait deux fois le même objet. Mais souvent ils n'arrivent pas à formuler précisément ce qu'ils comptent.

II B 3 En général bien traitée.

II B 4 a) et b) Le calcul, s'il est abordé, est en général mené correctement.

II B 5 Rarement traitée.

II B 6 On oublie souvent de remarquer qu'un sous-groupe d'indice 2 est forcément distingué. Que le sous-groupe correspondant de G soit abélien est très rarement établi.

TROISIÈME PARTIE

III A 1 L'important, après avoir mené le calcul suggéré, est de constater – et prouver – que le domaine considéré est convexe parce que $0 \leq \tau < \pi/2$.

III A 2 Assez bien traitée par les candidats parvenus à ce stade.

III A 3 Le plus souvent, on suppose implicitement que u et s commutent.

Les questions suivantes sont très peu abordées. Au début de III B il faut lire "pour toute valeur propre σ de s " (au lieu de S).