

Préparation d'Algèbre pour l'Agrégation 2006

Exercices sur la notion de dimension.

I. Prouver que dans l'espace des fonctions continues $\mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, noté $\mathcal{C}(\mathbb{R})$, la famille $(\exp_a : x \mapsto e^{ax})_{a \in \mathbb{R}}$ est libre.

II. Trouver une base du sous-espace de \mathbb{R}^n formé des n -uplets (x_1, \dots, x_n) vérifiant $x_1 + \dots + x_n = 0$.

III. Quelle est la dimension de l'espace vectoriel $V \subset \mathbb{R}^n$ engendré par les 2^n vecteurs $\pm e_1 \pm e_2 \pm e_3 \pm \dots \pm e_n$?

* Trouver une base de V formée par une partie de ces 2^n vecteurs.

IV. Soit K un corps et X un ensemble. On note K^X ou $\mathcal{F}(X, K)$ l'ensemble des applications $f: X \rightarrow K$.

a) Munir $\mathcal{F}(X, K)$ de la structure d'espace vectoriel sur K .

b) A quelle condition sur X et/ou K cet espace est-il de dim. finie?

⊂ Exhiber une bijection $\mathcal{P}(X) \rightarrow \mathcal{F}(X, \mathbb{F}_2)$. Ceci fait de $\mathcal{P}(X)$ un \mathbb{F}_2 -vectoriel ("transport de structure"). Que veut dire

$A+B$ pour deux parties $A, B \subset X$? Que veut dire $O \circ A$?

V. Dans $\mathcal{C}(\mathbb{R})$ quelles sont les dimensions de

$$V = \text{vect}(\cos^2 t, \sin^2 t, \cos 2t, \sin 2t)?$$

$$W = \text{vect}(1, \cos 2t, \sin 2t)?$$

$$\text{A-t-on } V=W?$$