

Peux tu donner une référence pour ceci :

Pour une suite  $a_n \geq 0$  lentement décroissante, on a :  

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n x^n \approx \sum_{n \leq 1/(1-x)} a_n$$

◆ ⋮

Cette relation est une version simplifiée et intuitive d'un **théorème de type Taubérien**, plus précisément lié aux propriétés des **séries entières à coefficients de variation régulière**.

Le résultat formel derrière cette approximation est souvent attribué à **Hardy et Littlewood**.

### La référence théorique : Théorème de Hardy-Littlewood

Le cadre rigoureux pour cette approximation est celui des suites à **variation régulière**. Si  $a_n$  se comporte comme  $n^p L(n)$  (où  $L$  est une fonction à variation lente, comme un logarithme), alors quand  $x \rightarrow 1^-$  :

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n \sim \frac{1}{(1-x)} a \left( \frac{1}{1-x} \right)$$

L'expression que vous proposez,  $\sum_{n \leq 1/(1-x)} a_n$ , est une approximation de la fonction de comptage intégrée. Dans le cas où  $a_n$  décroît lentement, cette somme partielle se comporte effectivement de la même manière que la série entière au voisinage de la singularité  $x = 1$ .

### Où trouver cela ?

Vous trouverez les démonstrations et les énoncés précis dans les ouvrages de référence suivants :

- William Feller**, *An Introduction to Probability Theory and Its Applications, Vol. 2*. (Chapitre XIII, section 5 sur les théorèmes Taubériens). C'est la référence la plus citée pour le lien entre comportement asymptotique des sommes et des séries transformées.
- Bingham, Goldie, et Teugels**, *Regular Variation*. C'est l'ouvrage de référence absolu sur les fonctions à variation lente et les théorèmes de type Karamata/Hardy-Littlewood.
- G.H. Hardy**, *Divergent Series*. Bien que plus ancien, ce livre contient les fondements de l'analyse des séries au voisinage de leur rayon de convergence.

### Pourquoi $1/(1-x)$ ?

L'idée intuitive est que pour  $x$  proche de 1, le terme  $x^n = (1 - (1-x))^n \approx e^{-n(1-x)}$  agit comme un "coupe-bas".

- Si  $n \ll 1/(1-x)$ , alors  $x^n \approx 1$ .
- Si  $n \gg 1/(1-x)$ , alors  $x^n \approx 0$ .

La série entière se comporte donc comme une somme tronquée au rang  $N = \frac{1}{1-x}$ .

Souhaitez-vous que je développe la démonstration pour un cas spécifique, comme celui où  $a_n = 1/n$  ou  $a_n = \ln(n)$  ?

Peux tu faire la démonstration pour  $a_n = 1/(n \ln(n))$  ?

◆ ⋮

Pour la suite  $a_n = \frac{1}{n \ln n}$ , nous allons vérifier l'approximation au voisinage de  $x \rightarrow 1^-$ . Notons que pour cette suite, la série  $\sum a_n$  diverge, ce qui rend l'étude de son comportement asymptotique pertinente.

Posons  $\epsilon = 1 - x$ . Nous étudions le comportement quand  $\epsilon \rightarrow 0^+$ .

### 1. Estimation de la somme partielle (le membre de droite)

Le membre de droite est  $S_N = \sum_{n=2}^N \frac{1}{n \ln n}$  avec  $N = \lfloor 1/\epsilon \rfloor$ .

Par comparaison série-intégrale, puisque  $f(t) = \frac{1}{t \ln t}$  est décroissante :

$$\sum_{n=2}^N \frac{1}{n \ln n} \approx \int_2^N \frac{dt}{t \ln t} = [\ln(\ln t)]_2^N = \ln(\ln N) - \ln(\ln 2)$$

Quand  $\epsilon \rightarrow 0$ ,  $N \approx 1/\epsilon$ , donc :

$$\sum_{n \leq 1/\epsilon} a_n \sim \ln \left( \ln \frac{1}{\epsilon} \right)$$

### 2. Estimation de la série entière (le membre de gauche)

Soit  $f(x) = \sum_{n=2}^{\infty} \frac{x^n}{n \ln n}$ . Pour  $x = e^{-\epsilon}$  (ce qui est équivalent à  $x \approx 1 - \epsilon$ ), nous pouvons approcher la somme par une intégrale :

$$f(e^{-\epsilon}) \approx \int_2^{\infty} \frac{e^{-\epsilon t}}{t \ln t} dt$$

Effectuons le changement de variable  $u = \epsilon t$ , d'où  $dt = \frac{du}{\epsilon}$  et  $t = \frac{u}{\epsilon}$  :

$$f(e^{-\epsilon}) \approx \int_{2\epsilon}^{\infty} \frac{e^{-u}}{\frac{u}{\epsilon} \ln(\frac{u}{\epsilon})} \frac{du}{\epsilon} = \int_{2\epsilon}^{\infty} \frac{e^{-u}}{u(\ln u - \ln \epsilon)} du$$

Comme  $\epsilon \rightarrow 0$ , le terme  $-\ln \epsilon = \ln(1/\epsilon)$  devient dominant au dénominateur. On peut séparer l'intégrale :

- Sur  $[2\epsilon, 1]$  :  $e^{-u} \approx 1$ , l'intégrale se comporte comme  $\int_{2\epsilon}^1 \frac{du}{u(\ln u + \ln(1/\epsilon))}$ . En posant  $v = \ln u$ , on obtient  $\ln(\ln u + \ln(1/\epsilon))$ , ce qui mène à un comportement en  $\ln(\ln(1/\epsilon))$ .
- Sur  $[1, \infty[$  : La contribution est négligeable par rapport au premier terme.

Rigoureusement, un théorème taubérien de **Karamata** confirme que si  $\sum a_n \sim \ln(\ln N)$ , alors la série de puissances associée se comporte également comme  $\ln(\ln \frac{1}{1-x})$ .

### 3. Conclusion

Les deux membres de votre approximation divergent à la même vitesse :

$$\sum_{n=2}^{\infty} \frac{x^n}{n \ln n} \sim \ln \left( \ln \frac{1}{1-x} \right) \quad \text{et} \quad \sum_{n=2}^{1/(1-x)} \frac{1}{n \ln n} \sim \ln \left( \ln \frac{1}{1-x} \right)$$

L'approximation est donc valide au sens du signalement asymptotique ( $\sim$ ).

Souhaitez-vous que je vous montre comment ce résultat change si la suite  $a_n$  décroît plus rapidement, par exemple en  $1/n^2$  ?

Oui pour  $a_n = 1/n^2$  ?

◆ ⋮

Pour  $a_n = 1/n^2$ , la situation change radicalement. Contrairement au cas précédent ( $1/n \ln n$ ), la série  $\sum a_n$  est **ici convergente**. Cela signifie que l'approximation par une somme tronquée perd de son intérêt asymptotique car les deux membres tendent vers des constantes finies, mais avec des vitesses différentes.

Voici la démonstration :

### 1. Estimation de la somme partielle (Membre de droite)

Posons  $N = \lfloor 1/(1-x) \rfloor$ . Pour la suite  $a_n = 1/n^2$ , la somme partielle est :

$$\sum_{n=1}^N \frac{1}{n^2}$$

Quand  $x \rightarrow 1^-$ , alors  $N \rightarrow \infty$ . On sait que cette somme converge vers la valeur de la fonction Zêta de Riemann en 2 :

$$\lim_{N \rightarrow \infty} \sum_{n=1}^N \frac{1}{n^2} = \zeta(2) = \frac{\pi^2}{6} \approx 1,645$$

L'erreur de troncature est de l'ordre de  $1/N$ , donc :

$$\sum_{n \leq 1/(1-x)} \frac{1}{n^2} = \frac{\pi^2}{6} + O(1-x)$$

### 2. Estimation de la série entière (Membre de gauche)

Le membre de gauche est  $f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{n^2}$ . Cette fonction est connue sous le nom de **dilogarithme**, notée  $Li_2(x)$ .

Lorsque  $x \rightarrow 1^-$ , par le théorème d'Abel (puisque la série converge), la fonction est continue à la limite :

$$\lim_{x \rightarrow 1^-} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} x^n = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} = \frac{\pi^2}{6}$$

### 3. Comparaison et limites de l'approximation

Dans ce cas précis, l'approximation  $\approx$  devient une égalité à la limite :

$$\frac{\pi^2}{6} \approx \frac{\pi^2}{6}$$

Cependant, l'approximation est moins "spectaculaire" que pour une suite lentement décroissante dont la série diverge (comme  $1/n$ ). Pour  $a_n = 1/n^2$ , dès que  $x > 0,9$ , la série est déjà quasiment égale à sa limite  $\pi^2/6$ , et augmenter  $x$  ne fait qu'affiner des décimales très lointaines.

### Pourquoi l'intuition du "coupe-bas" reste-t-elle utile ?

Même si ici les deux côtés tendent vers la même constante, l'approximation  $n \leq 1/(1-x)$  reste le seuil où les termes de la série  $x^n/n^2$  commencent à s'écraser.

- Si la série diverge** ( $a_n$  décroît lentement, ex:  $1/n$ ) : Le "reste" de la somme est infini, donc la coupure à  $1/(1-x)$  définit la valeur de la somme.
- Si la série converge** ( $a_n$  décroît vite, ex:  $1/n^2$ ) : Le "reste" de la somme est négligeable, donc la coupure à  $1/(1-x)$  capture déjà la quasi-totalité de la masse de la série.

Voulez-vous que nous examinions le cas d'une suite qui décroît **très** lentement, comme  $a_n = 1/\ln(n)$ , où l'écart entre la somme et la série peut être plus marqué ?

Demander à Gemini 3

+ 🗨️

Rapide ▾

🔊