

Peux tu répondre à l'exercice suivant de théorie des jeux :

Ex.2. On considère le jeu à deux joueurs à somme nulle où J1 choisit parmi ses deux stratégies A ou B, J2 choisit parmi ses stratégies a ou b ou c, avec le tableau ci-dessous donnant le gain de J1 suivant les choix de J1 et J2 :

```
<div style="margin-left:10pt;margin-top:-7pt">
```

	a	b	c
A	3	-1	2
B	1	4	3

a. Quel est le gain garanti optimal \underline{g} de J1 ? Quelle est la garantie optimale \overline{g} de J2 sur sa perte ? Le jeu admet-il un équilibre ?

b. Quel est le gain moyen de J1 lorsqu'il joue A avec fréquence $p \in [0,1]$ (et donc B avec fréquence $1-p$) et J2 joue b ?

c. Tracer dans un même repère les trois graphes des gains moyens de J1 comme fonction de p lorsque J1 joue A avec fréquence p et J2 joue a puis b puis c.

Quelle est la (ou les) meilleure(s) réponse(s) de J2 (a ou b ou c), en terme de perte moyenne, au choix $p = \frac{1}{4}$ par J1 ?

Pour quelle valeur de p les stratégies b et c sont-elles toutes deux des meilleures réponses de J2 (en terme de perte moyenne) au choix de p par J1 ?

d. Déterminer la ou les stratégies mixtes prudentes de J1. Quel est le gain moyen garanti optimal de J1 ?

Quel est le gain moyen garanti optimal de J2 ? Expliquez.

e. J1 joue A avec fréquence $\frac{1}{4}$ pendant que J2 joue une stratégie mixte (q_1, q_2, q_3) ; J1 obtient alors un gain moyen de $\frac{11}{4}$. J2 regrette-t-il son choix ? Et J1 ?



Réflexion durant 1m 16s >

Super — je fais l'exercice pas à pas.

Rappel du tableau (gain de J1) :

	a	b	c
A	3	-1	2
B	1	4	3

a) Garantie optimale de J1 et de J2 — existence d'un équilibre

Pour des stratégies pures, les minima sur les lignes (gains garantis si J1 fixe A ou B) :

- $\min_A = \min(3, -1, 2) = -1$
- $\min_B = \min(1, 4, 3) = 1$.

Donc la **garantie maximale de J1 en pures** (maximin pur) est

$$\underline{g} = \max(-1, 1) = 1.$$

Pour J2 (il cherche à **minimiser** le gain de J1) : maxima sur les colonnes

- colonne a : $\max(3, 1) = 3$,
- colonne b : $\max(-1, 4) = 4$,
- colonne c : $\max(2, 3) = 3$.

Donc la **garantie optimale de J2** (minimax pur) est

$$\overline{g} = \min(3, 4, 3) = 3.$$

Comme $\underline{g} = 1 \neq \overline{g} = 3$, il n'y a pas d'équilibre en stratégies pures. (Toutefois, pour un jeu fini à somme nulle, il existe toujours un **équilibre en stratégies mixtes** — valeur du jeu unique en mixtes.)

b) Gain moyen de J1 quand J1 joue A avec fréquence $p \in [0, 1]$ et J2 joue b

Si J1 joue A avec prob. p et B avec prob. $1 - p$, et J2 joue purement b,

$$u(p, b) = p \cdot (-1) + (1 - p) \cdot 4 = -p + 4 - 4p = 4 - 5p.$$

c) Graphes des gains moyens en fonction de p

Pour chaque colonne (action de J2) le gain moyen de J1 est une droite en p :

- si J2 joue a : $u(p, a) = p \cdot 3 + (1 - p) \cdot 1 = 1 + 2p$. (droite de pente +2, valeur en $p = 0 = 1$)
- si J2 joue b : $u(p, b) = 4 - 5p$. (pente -5, valeur en $p = 0 = 4$)
- si J2 joue c : $u(p, c) = p \cdot 2 + (1 - p) \cdot 3 = 3 - p$. (pente -1, valeur en $p = 0 = 3$)

Points d'intersection utiles :

- $u_a = u_b \implies 1 + 2p = 4 - 5p \implies p = \frac{3}{7}$ (valeur commune = $13/7$)
- $u_a = u_c \implies 1 + 2p = 3 - p \implies p = \frac{2}{3}$ (valeur = $7/3$)
- $u_b = u_c \implies 4 - 5p = 3 - p \implies p = \frac{1}{4}$ (valeur = $11/4$)

Calcul pour $p = \frac{1}{4}$:

$$u(p, a) = 1 + 2 \cdot \frac{1}{4} = 1,5, \quad u(p, b) = u(p, c) = \frac{11}{4} = 2,75.$$

Meilleure(s) réponse(s) de J2 (minimisant la perte moyenne) pour $p = \frac{1}{4}$:

J2 cherche à *minimiser* le gain moyen de J1. Aux valeurs ci-dessus la plus petite est

$u(p, a) = 1,5$. Donc la **meilleure réponse est a** (seule).

Pour quelle(s) valeur(s) de p les stratégies b et c sont-elles toutes deux meilleures réponses de J2 ?

- b et c sont égales seulement en $p = \frac{1}{4}$. Mais pour être *meilleures réponses* il faudrait aussi que leur valeur commune soit la **plus petite** des trois. Or à $p = \frac{1}{4}$ on a $u_a = 1,5 < u_b = u_c = 2,75$. Donc **il n'existe aucun $p \in [0, 1]$ pour lequel b et c sont simultanément des meilleures réponses** (i.e. minimisent le gain de J1).

d) Stratégies mixtes prudentes de J1 et valeur du jeu

On cherche p qui **maximise** la fonction $m(p) = \min\{u(p, a), u(p, b), u(p, c)\}$.

D'après le point (c) :

- pour $0 \leq p \leq \frac{3}{7}$, la plus petite des trois est $u(p, a) = 1 + 2p$ (croissante en p);
- pour $p \geq \frac{3}{7}$, la plus petite devient $u(p, b) = 4 - 5p$ (décroissante en p).

La fonction $m(p)$ atteint donc son maximum au point d'intersection $p = \frac{3}{7}$ (où $u_a = u_b$ et u_c est plus grand). La valeur commune en ce point est

$$\underline{g}_{\text{mix}} = u\left(\frac{3}{7}, a\right) = 1 + 2 \cdot \frac{3}{7} = \frac{13}{7} \approx 1,857.$$

Donc :

- Stratégie mixte prudente (unique) de J1** : jouer A avec $p = \frac{3}{7}$ et B avec $1 - p = \frac{4}{7}$.
- Gain moyen garanti optimal de J1 (valeur du jeu)** : $\frac{13}{7}$.

Par le théorème minimax, J2 peut également garantir au plus $\frac{13}{7}$ (et donc la garantie optimale de J2 en mixtes est aussi $\frac{13}{7}$). Concrètement on peut trouver la stratégie mixte optimale de J2 en égalisant les gains de A et B ; on obtient :

$$(q_a, q_b, q_c) = \left(\frac{5}{7}, \frac{2}{7}, 0\right),$$

qui donne bien la valeur $13/7$.

e) (★) Situation donnée — regrets ?

Hypothèse : J1 joue A avec $p = \frac{1}{4}$, J2 joue une stratégie mixte quelconque (q_1, q_2, q_3) , et le gain moyen obtenu par J1 est $\frac{11}{4} = 2,75$.

- J2 regrette-t-il son choix ?** Oui. En effet J2 aurait pu jouer sa stratégie optimale $(5/7, 2/7, 0)$ qui ramène le gain de J1 à la **valeur du jeu $13/7 \approx 1,857 < 2,75$** . Donc le mix réellement choisi par J2 laisse J1 obtenir un gain supérieur à la valeur du jeu — J2 aurait pu réduire sa perte en changeant — donc **J2 regrette**.
- J1 regrette-t-il son choix $p = \frac{1}{4}$?** Pour un q donné, l'espérance de J1 en fonction de p est une droite entre $u(A|q)$ et $u(B|q)$. Si $u(A|q) \neq u(B|q)$, alors la stratégie mixte $p = \frac{1}{4}$ n'est **pas** nécessairement la meilleure : il existe une pure (A ou B) qui donne au moins aussi bien, et généralement strictement mieux que la moyenne mixte. On peut vérifier qu'il est **impossible** d'avoir $u(A|q) = u(B|q) = 11/4$ avec des probabilités valides (solution donnerait $q_b < 0$), donc $u(A|q) \neq u(B|q)$. Ainsi l'un des deux purs A ou B donne strictement plus que $11/4$ contre ce q , donc **J1 aurait pu obtenir un gain strictement supérieur en déviant vers la pure correspondante** — donc **J1 regrette aussi** son choix $p = \frac{1}{4}$.

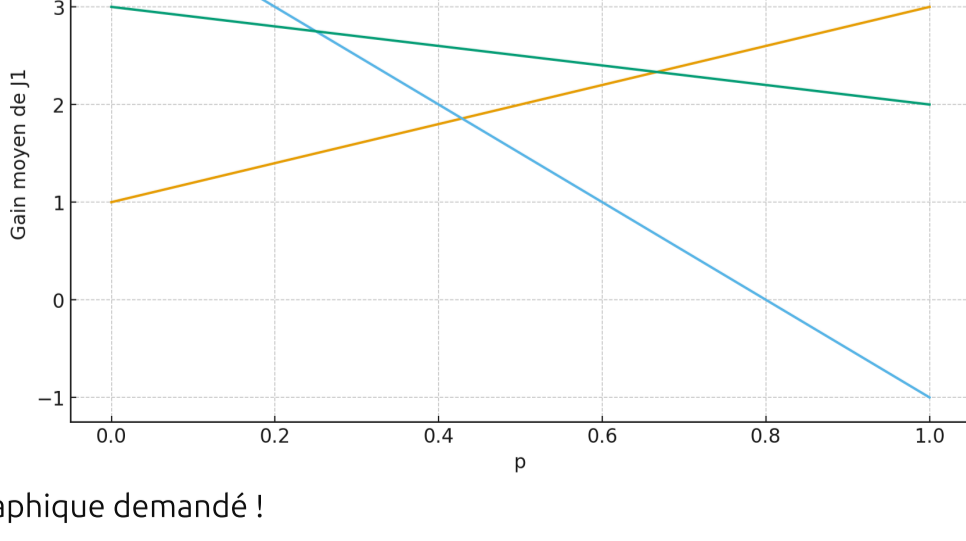
En résumé : **les deux joueurs regrettent** (J2 parce qu'il a laissé J1 obtenir plus que la valeur du jeu ; J1 parce que sa stratégie mixte $p = \frac{1}{4}$ n'est pas une meilleure-réponse à la stratégie réelle de J2).

Si tu veux, je peux :

- tracer les trois droites $u(p, a)$, $u(p, b)$, $u(p, c)$ sur un graphique pour visualiser (je peux produire le graphique),
- afficher la vérification algébrique de la stratégie optimale de J2 $(5/7, 2/7, 0)$,
- ou résoudre la même chose en notant explicitement les meilleures réponses de chaque côté.



Oui trace les trois droites sur un même graphique



Voici le graphique demandé !

Les trois droites correspondent aux gains moyens de J1 lorsque J2 joue respectivement **a, b et c**.

Si tu veux, je peux aussi ajouter les points d'intersection, tracer l'enveloppe inférieure (la fonction de sécurité de J1), ou superposer la meilleure-réponse de J2 en fonction de p .



