ChatGPT

Ex.2. On considère le jeu à deux joueurs à somme nulle où J1 choisit parmi ses deux stratégies A ou B, J2 choisit parmi ses stratégies a ou b ou c, avec le tableau ci-dessous donnant le gain de J1 suivant les choix de J1 et J2 :

	a	b	c
A	3	-1	2
B	1	4	3

a. Quel est le gain garanti optimal $\underline{g}$ de J1 ? Quelle est la garantie optimale $\overline{g}$ de J2 sur sa perte ? Le jeu admet il un équilibre ?

b. Quel est le gain moyen de J1 lorsqu'il joue A avec fréquence $p \in [0,1]$ (et donc B avec fréquence $1-p$) et J2 joue b ?

c. Tracer dans un même repère les trois graphes des gains moyens de J1 comme fonction de p lorsque J1 joue A avec fréquence p et J2 joue a puis b puis c.

Quelle est la (ou les) meilleure(s) réponse(s) de J2 (a ou b ou c), en terme de perte moyenne, au choix $p = \frac{1}{4}$ par J1 ?

Pour quelle valeur de p les stratégies b et c sont elles toutes deux des meilleures réponses de J2 (en terme de perte moyenne) au choix de p par J1 ?

d. Déterminer la ou les stratégies mixtes prudentes de J1. Quel est le gain moyen garanti optimal de J1 ?

Quel est le gain moyen garanti optimal de J2 ? Expliquez.

e.★ J1 joue A avec fréquence $\frac{1}{4}$ pendant que J2 joue une stratégie mixte (q_1, q_2, q_3) ; J1 obtient alors un gain moyen de $\frac{11}{4}$. J2 regrette t-il son choix ? Et J1 ?

Peux tu répondre à cet exercice de théorie des jeux (cours d'introduction en Licence Mathématiques 2ème année) ?

On considère le jeu à somme nulle suivant (gain de J1) :

	a	b	c
A	3	-1	2
B	1	4	3

---

a. Garanties optimales et équilibre

Garantie de J1 (maximin)

Pour chaque stratégie de J1, on regarde son pire gain :

- A : $\min(3,-1,2) = -1$
- B : $\min(1,4,3) = 1$

Donc

$$g = \max(-1,1) = 1$$

La stratégie prudente pure de J1 est **B**.

Garantie de J2 (minimax)

Pour chaque stratégie de J2, on regarde le gain maximal de J1 :

- a : $\max(3,1) = 3$
- b : $\max(-1,4) = 4$
- c : $\max(2,3) = 3$

Donc

$$\bar{g} = \min(3,4,3) = 3$$

Comme $g \neq \bar{g}$, **il n'y a pas d'équilibre en stratégies pures**.

---

b. Gain moyen de J1 si J1 mélange et J2 joue b

J1 joue A avec probabilité p, B avec $1-p$.
Contre b :

$$G_b(p) = p(-1) + (1-p)4 = 4 - 5p$$

---

c. Gains moyens selon la stratégie de J2

- Contre a :

$$G_a(p) = 3p + 1(1-p) = 1 + 2p$$

- Contre b :

$$G_b(p) = 4 - 5p$$

- Contre c :

$$G_c(p) = 2p + 3(1-p) = 3 - p$$

J2 cherche à **minimiser** ces fonctions.

Meilleure réponse de J2 pour $p = \frac{1}{4}$

$$\begin{aligned} G_a(1/4) &= 1 + 2(1/4) = 1.5 \\ G_b(1/4) &= 4 - 5(1/4) = 2.75 \\ G_c(1/4) &= 3 - 1/4 = 2.75 \end{aligned}$$

La meilleure réponse est a (perte minimale).

Quand b et c sont-elles toutes deux meilleures réponses ?

On résout $G_b(p) = G_c(p)$:

$$4 - 5p = 3 - p \implies p = \tfrac{1}{4}$$

Mais pour être **meilleures réponses**, il faut aussi être minimales :

$$G_a(1/4) = 1.5 < 2.75$$

Donc **il n'existe aucune valeur de** p pour laquelle b et c sont simultanément meilleures réponses de J2.

---

d. Stratégies mixtes prudentes et valeur du jeu

J1 choisit p pour maximiser :

$$\min\{G_a(p), G_b(p), G_c(p)\}$$

Le point optimal est à l'intersection de G_a et G_c :

$$1 + 2p = 3 - p \implies p = \tfrac{2}{3}$$

Valeur correspondante :

$$v = 1 + 2 \cdot \tfrac{2}{3} = \tfrac{7}{3}$$

Donc :

- stratégie prudente de J1 :

$$(A,B) = \left(\tfrac{2}{3}, \tfrac{1}{3}\right)$$

- **gain moyen garanti optimal de J1** : $\boxed{\frac{7}{3}}$

Par dualité des jeux à somme nulle :

- **gain moyen garanti optimal de J2** (sa perte minimale) est aussi $\boxed{\frac{7}{3}}$.

---

e. ★ Cas $p = \frac{1}{4}$

J1 joue A avec fréquence $1/4$.
J2 joue une stratégie mixte (q_1, q_2, q_3).

On sait que J1 obtient alors un gain moyen de $\frac{11}{4} = 2.75$.

- Or la meilleure réponse de J2 à $p = \frac{1}{4}$ est a, qui donne une perte de 1.5.
- Donc J2 **regrette son choix** (il pouvait réduire sa perte).
- J1, lui, **ne regrette pas** : son gain est strictement supérieur à sa garantie $\frac{7}{3}$.

Résumé rapide

- Pas d'équilibre en stratégies pures
- Valeur du jeu : $\frac{7}{3}$
- Stratégie prudente de J1 : $(2/3, 1/3)$
- À $p = 1/4$, J2 doit jouer a, sinon il regrette.