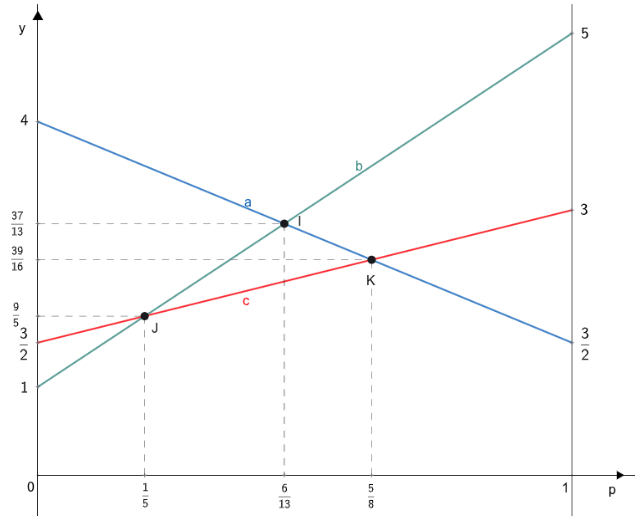

Peux tu répondre à l'exercice ci-dessous de théorie des jeux (cours d'introduction en Licence Mathématiques 2ème année) :

On considère un jeu fini à deux joueurs (J1 et J2) à somme nulle. J1 a deux stratégies qu'il joue avec une fréquence p pour la première, $1-p$ pour la seconde. J2 a trois stratégies nommées a,b,c. On reproduit (dessin joint) les "graphes de réponses pures de J2", graphes des gains moyens de J1 comme fonction de p selon que J2 joue a (graphe de couleur bleue et nommé "a" sur le dessin) ou b (graphe de couleur vert et nommé "b") ou c (graphe de couleur rouge et nommé "c"). On indique sur le dessin les abscisses et/ou ordonnées des points remarquables.

a. Quelle est d'après le dessin la valeur de p meilleure réponse de J1 en terme de gain moyen à la stratégie a de J2 ?

Quelle est d'après le dessin la meilleure réponse pure de J2 en terme de gain moyen à la stratégie mixte $p=\frac{5}{8}$ de J1 ?

b. Quel est le gain moyen garanti optimal de J1 ? Quelle est la stratégie mixte prudente p_0 de J1 ?

Quelle est la majoration garantie optimale de la perte moyenne de J2 lorsque J2 joue l'extension mixte du jeu ?

c Quelles sont parmi a,b,c les meilleures réponses pures de J2 à la stratégie mixte prudente de J1 ?

En déduire parmi les stratégies mixtes (q_a,q_b,q_c) (*i.e.* J2 joue a avec fréquence q_a, etc.) les meilleures réponses de J2 à la stratégie mixte prudente de J1.

d. La stratégie pure a est elle prudente pour J2 dans l'extension mixte du jeu ?

Montrer que la stratégie mixte $(q_a,q_b,q_c)=(q,0,1-q)$ est prudente pour J2 si et seulement si la dérivée par rapport à p du gain moyen de J1 lorsque J2 joue sa stratégie a avec fréquence q et sa stratégie c avec fréquence $1-q$ est nulle.

En déduire la stratégie mixte prudente de J2.

Je m'appuie uniquement sur la lecture du dessin (valeurs indiquées, intersections, pentes).

---

a.

Meilleure réponse de J1 à la stratégie pure a de J2

Le graphe correspondant à a (droite bleue) est **strictement décroissant** en p.
Le gain moyen de J1 est donc maximal pour

$$\boxed{p = 0}$$

(ce qui donne un gain égal à 4).

Meilleure réponse pure de J2 à la stratégie mixte $p = \frac{5}{8}$ de J1

À $p = \frac{5}{8}$, le dessin montre que :

- les droites a (bleue) et c (rouge) se coupent en K,

- leur valeur commune est $\frac{39}{16}$,
- la droite b (verte) est strictement au-dessus.

Comme J2 cherche à **minimiser** le gain de J1, ses meilleures réponses sont :

$$\boxed{a \text{ et } c}$$

---

b.

Gain moyen garanti optimal de J1 et stratégie prudente

Le gain garanti de J1 est

$$\max_{p\in[0,1]} \min\{g_a(p), g_b(p), g_c(p)\}.$$

Sur le dessin, le maximum de l'enveloppe inférieure est atteint au point I, intersection des droites a et b, avec :

$$p_0 = \frac{6}{13}, \qquad g(I) = \frac{37}{13}.$$

Donc :

$$\boxed{\text{gain garanti optimal de J1} = \frac{37}{13}}, \qquad \boxed{\text{stratégie prudente de J1 } : \ p_0 = \frac{6}{13}}.$$

Majoration garantie optimale de la perte moyenne de J2

Dans un jeu à somme nulle (théorème minimax), cette valeur est la même :

$$\boxed{\frac{37}{13}}.$$

---

c.

Meilleures réponses pures de J2 à la stratégie prudente de J1

À $p_0 = \frac{6}{13}$, le minimum est atteint simultanément par les droites :

$$a \quad \text{et} \quad b,$$

tandis que c est strictement au-dessus.

Donc les meilleures réponses pures sont :

$$\boxed{a \text{ et } b}.$$

Meilleures réponses mixtes de J2

Toutes les stratégies mixtes supportées par $\{a, b\}$, c'est-à-dire

$$(q_a, q_b, q_c) = (q, 1-q, 0), \quad q \in [0,1],$$

sont meilleures réponses à la stratégie prudente de J1.

---

d.

La stratégie pure a est-elle prudente pour J2 ?

Non.
Si J2 joue a, J1 choisit $p = 0$ et obtient un gain égal à 4, strictement supérieur à la valeur du jeu $\frac{37}{13}$.
Donc :

$$\boxed{a \text{ n'est pas prudente pour J2}}.$$

Condition de prudence pour une stratégie mixte $(q, 0, 1-q)$

Le gain moyen de J1 contre la stratégie mixte

$$q\,a + (1-q)\,c$$

est une fonction affine de p, dont la pente vaut :

$$q\,g_a'(p) + (1-q)\,g_c'(p).$$

Cette stratégie est prudente **si et seulement si** cette pente est nulle (fonction constante en p), c'est-à-dire :

$$\boxed{\frac{d}{dp}\big(q\,g_a(p) + (1-q)\,g_c(p)\big) = 0}.$$

Calcul de la stratégie mixte prudente de J2

D'après le dessin :

- pente de a : $-\frac{5}{2}$,
- pente de c : $\frac{3}{2}$.

Condition de pente nulle :

$$q\left(-\frac{5}{2}\right)+(1-q)\left(\frac{3}{2}\right)=0 \iff 3-8q=0 \iff q=\frac{3}{8}.$$

Ainsi, la stratégie mixte prudente de J2 est :

$$\boxed{(q_a, q_b, q_c)=\left(\frac{3}{8},\ 0,\ \frac{5}{8}\right)}.$$

Résumé rapide

- $p_0=\frac{6}{13}$, valeur du jeu $=\frac{37}{13}$.
- Réponses optimales de J2 à p_0 : a et b.
- Stratégie prudente de J2 : $\left(\frac{3}{8}, 0, \frac{5}{8}\right)$.