

Construis un exemple d'ouvert U de $[0,1]$ dense dans $[0,1]$ et de mesure de Lebesgue $\leq 1/2$.

Pour construire un exemple d'ensemble ouvert $U \subset [0, 1]$ dense dans $[0, 1]$ et de mesure de Lebesgue $\leq 1/2$, on peut procéder comme suit :

Construction

- Diviser l'intervalle $[0, 1]$:** On considère une suite d'intervalles ouverts (I_n) inclus dans $[0, 1]$ de longueur totale $\leq 1/2$.
- Choisir une suite d'intervalles couvrant un ensemble dense :** On peut construire U pour qu'il contienne un ensemble dense de points (par exemple, les nombres rationnels de $[0, 1]$).

Exemple explicite

- Soit $\{q_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ une énumération des rationnels de $[0, 1]$ (dense dans $[0, 1]$).
- Autour de chaque q_n , on construit un intervalle ouvert I_n de longueur $\ell(I_n) = \frac{1}{2^{n+2}}$. Ainsi :

$$\text{Longueur totale} = \sum_{n=1}^{\infty} \ell(I_n) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2^{n+2}} = \frac{1}{4} \cdot \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2^n} = \frac{1}{4} \cdot 1 = \frac{1}{4}.$$

- Définissons $U = \bigcup_{n=1}^{\infty} I_n$. Cet ensemble est :
 - Ouvert :** Car c'est une union d'intervalles ouverts.
 - Dense :** Il contient tous les rationnels de $[0, 1]$, donc il est dense dans $[0, 1]$.
 - Mesure de Lebesgue :** $\mu(U) \leq \sum_{n=1}^{\infty} \ell(I_n) = \frac{1}{4} \leq \frac{1}{2}$.

Conclusion

L'ensemble $U = \bigcup_{n=1}^{\infty} I_n$ vérifie les propriétés demandées :

- U est un ouvert dense de $[0, 1]$,
- La mesure de Lebesgue de U est $\leq 1/2$.

Quel est l'ensemble des points de discontinuité de la fonction caractéristique de U ?

Pour un ensemble $U \subset [0, 1]$, la fonction caractéristique de U , notée $\chi_U(x)$, est définie par :

$$\chi_U(x) = \begin{cases} 1 & \text{si } x \in U, \\ 0 & \text{si } x \notin U. \end{cases}$$

Continuité et discontinuité de χ_U

- La fonction χ_U est continue en $x \in [0, 1]$ si et seulement si :

$$\lim_{\epsilon \rightarrow 0^+} \chi_U(x + \epsilon) = \lim_{\epsilon \rightarrow 0^+} \chi_U(x - \epsilon) = \chi_U(x).$$

Cela implique que x ne peut pas être à la frontière de U .

- Autrement dit, χ_U est discontinue exactement aux **points de la frontière** de U , c'est-à-dire l'ensemble :

$$\partial U = \overline{U} \setminus U^\circ,$$

où :

- \overline{U} est l'adhérence de U ,
- U° est l'intérieur de U .

Frontière de U dans notre construction

Dans l'exemple construit précédemment, $U = \bigcup_{n=1}^{\infty} I_n$ est une union d'intervalles ouverts I_n , avec :

- \overline{U} : L'adhérence de U est l'ensemble $[0, 1]$, car U est dense dans $[0, 1]$.
- U° : L'intérieur de U est U lui-même, car c'est une union d'intervalles ouverts.

Ainsi, la frontière de U est donnée par :

$$\partial U = \overline{U} \setminus U^\circ = [0, 1] \setminus U.$$

Ensemble des points de discontinuité

L'ensemble des points de discontinuité de χ_U est donc $[0, 1] \setminus U$, c'est-à-dire les points de $[0, 1]$ qui ne sont pas dans U . Ces points forment un ensemble d'intérieur vide et de mesure $1 - \mu(U) \leq \frac{1}{2}$.

Quelle est la mesure de Lebesgue de cet ensemble ?

Dans l'exemple construit, l'ensemble $U = \bigcup_{n=1}^{\infty} I_n$ est un ouvert dense dans $[0, 1]$ dont la mesure de Lebesgue est donnée par :

$$\mu(U) = \sum_{n=1}^{\infty} \ell(I_n) = \frac{1}{2}.$$

L'ensemble complémentaire de U dans $[0, 1]$, noté $[0, 1] \setminus U$, correspond aux points où la fonction caractéristique χ_U est discontinue. Sa mesure de Lebesgue est simplement :

$$\mu([0, 1] \setminus U) = \mu([0, 1]) - \mu(U).$$

Puisque $\mu([0, 1]) = 1$, on a :

$$\mu([0, 1] \setminus U) = 1 - \mu(U).$$

Exemple explicite

Dans notre construction :

$$\mu(U) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2^{n+2}} = \frac{1}{4}.$$

Donc :

$$\mu([0, 1] \setminus U) = 1 - \frac{1}{4} = \frac{3}{4}.$$

Conclusion

La mesure de Lebesgue de l'ensemble $[0, 1] \setminus U$, qui est l'ensemble des points de discontinuité de la fonction caractéristique χ_U , est $\frac{3}{4}$.

La fonction caractéristique de U est elle Riemann intégrable ?

Pour déterminer si la fonction caractéristique χ_U est Riemann intégrable, rappelons les critères d'intégrabilité de Riemann :

- Une fonction bornée $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ est Riemann intégrable si l'ensemble de ses points de discontinuité a une **mesure de Lebesgue nulle**.
- Si l'ensemble des points de discontinuité a une mesure strictement positive, la fonction n'est pas Riemann intégrable.

Analyse pour χ_U

- La fonction χ_U est définie sur $[0, 1]$ et est bornée (elle prend les valeurs 0 et 1).
- Ses points de discontinuité correspondent à la frontière de U , qui est $[0, 1] \setminus U$.
- Dans notre construction, $[0, 1] \setminus U$ a une mesure de Lebesgue strictement positive (par exemple, $\mu([0, 1] \setminus U) = \frac{3}{4}$).

Conclusion

Puisque l'ensemble des points de discontinuité de χ_U a une mesure strictement positive, la fonction caractéristique χ_U n'est pas Riemann intégrable.

Remarque

Bien que χ_U ne soit pas Riemann intégrable, elle est Lebesgue intégrable, car la mesure de $[0, 1] \setminus U$ est finie. L'intégrale de Lebesgue de χ_U sur $[0, 1]$ est simplement $\mu(U)$, qui est $\frac{1}{4}$ dans cet exemple.

Est ce que la fonction caractéristique d'un ouvert de $[0,1]$ est toujours Riemann intégrable ?

Non, la fonction caractéristique d'un ouvert $U \subset [0, 1]$ n'est pas toujours Riemann intégrable.

Critère pour l'intégrabilité de Riemann

Pour qu'une fonction $f : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$ soit Riemann intégrable, l'ensemble de ses points de discontinuité doit avoir une **mesure de Lebesgue nulle**. La fonction caractéristique χ_U est discontinue exactement aux points de la frontière de U , c'est-à-dire $\partial U = \overline{U} \setminus U^\circ$.

Analyse pour un ouvert U

- Si U est un ouvert "bien comporté" (par exemple, une union finie d'intervalles ouverts disjoints), alors la frontière ∂U est un ensemble fini ou dénombrable, ce qui implique que ∂U a une mesure de Lebesgue nulle. Dans ce cas, χ_U est Riemann intégrable.
- En revanche, si U est un ouvert plus "pathologique", comme un ouvert dense (par exemple, une union infinie d'intervalles avec une frontière de mesure strictement positive), alors la frontière ∂U peut avoir une mesure strictement positive. Dans ce cas, χ_U n'est pas Riemann intégrable.

Exemple

- Si $U = \bigcup_{n=1}^{\infty} (q_n - \frac{1}{2^{n+2}}, q_n + \frac{1}{2^{n+2}})$, où $\{q_n\}$ est une énumération des rationnels dans $[0, 1]$, alors $\partial U = [0, 1] \setminus U$, et cet ensemble peut avoir une mesure strictement positive. La fonction χ_U n'est pas Riemann intégrable.

Conclusion

La fonction caractéristique d'un ouvert $U \subset [0, 1]$ est Riemann intégrable si et seulement si la frontière ∂U a une mesure de Lebesgue nulle. Cela dépend donc de la structure spécifique de l'ouvert U .

Qu'est ce qui est vrai entre ta réponse aujourd'hui et celle d'il y a quelques jours que tu as nommé "Fonction caractéristique intégrabilité Riemann" ?

Pour clarifier et éviter toute confusion, voici un récapitulatif des idées principales, en m'assurant de corriger toute éventuelle incohérence entre mes réponses précédentes :

1. Critère d'intégrabilité de Riemann

Une fonction f définie sur un intervalle $[a, b]$ est Riemann intégrable si elle est bornée et si l'ensemble de ses points de discontinuité a une mesure de Lebesgue nulle.

- Les **points de discontinuité** de la fonction caractéristique χ_U d'un ensemble U sont précisément les points de la **frontière** de U , notée ∂U .

2. Cas général pour un ouvert U

Pour un ouvert $U \subset [0, 1]$:

- U est une union d'intervalles ouverts (potentiellement infinis),
- La frontière de U , $\partial U = \overline{U} \setminus U^\circ$, peut avoir une mesure de Lebesgue nulle ou positive, selon la structure de U .

Conséquence :

- Si ∂U a une mesure de Lebesgue nulle, alors χ_U est Riemann intégrable.
- Si ∂U a une mesure de Lebesgue strictement positive, alors χ_U n'est pas Riemann intégrable.

3. Réponse dans le cas précédent (dense dans $[0, 1]$)

Dans l'exemple que nous avons étudié où $U = \bigcup_{n=1}^{\infty} I_n$ est un ouvert dense dans $[0, 1]$, la frontière $\partial U = [0, 1] \setminus U$ avait une mesure strictement positive (par exemple $\mu([0, 1] \setminus U) = \frac{3}{4}$). Par conséquent, χ_U n'est pas Riemann intégrable dans ce cas spécifique.

4. Récapitulatif et compatibilité des réponses

- Si, dans une réponse précédente, j'ai laissé entendre que la fonction caractéristique d'un ouvert serait toujours Riemann intégrable, cela serait incorrect dans le cas où la frontière ∂U a une mesure positive (comme dans l'exemple d'un ouvert dense).
- La réponse actuelle — que la fonction caractéristique d'un ouvert U est Riemann intégrable uniquement si la frontière ∂U a une mesure nulle — est la plus précise et correcte.

Si des différences dans la formulation ou l'accentuation ont créé une confusion, je m'excuse pour l'ambiguïté, et je confirme que c'est la **mesure de la frontière** qui décide de l'intégrabilité Riemannienne de χ_U .

Il y a quelques jours tu as écrit :

> Un ouvert $A \subset [0,1]$ peut être écrit comme une union dénombrable de segments ouverts disjoints (a_i, b_i) , avec $a_i, b_i \in [0,1]$.

> L'union $\chi_A(x)$ est discontinue aux bornes a_i et b_i des intervalles ouverts, mais ces points sont en nombre au plus dénombrable.

> Un ensemble dénombrable a une mesure de Lebesgue nulle.

Qu'est ce qui n'est pas vrai dans ces affirmations ?

Analysons les affirmations une par une pour identifier les éventuelles erreurs ou imprécisions.

1. "Un ouvert $A \subset [0, 1]$ peut être écrit comme une union dénombrable de segments ouverts disjoints (a_i, b_i) , avec $a_i, b_i \in [0, 1]$."

Cette affirmation est correcte.

- Tout ouvert $A \subset [0, 1]$ peut être exprimé comme une union dénombrable de segments ouverts disjoints (a_i, b_i) , grâce à la propriété de régularité des ouverts dans les espaces métriques (et $[0, 1]$ est un espace métrique compact).

2. "La fonction $\chi_A(x)$ est discontinue aux bornes a_i et b_i des intervalles ouverts."

Cette affirmation est correcte, mais elle **ne décrit pas nécessairement tous les points de discontinuité** de χ_A .

- Les points a_i et b_i sont effectivement des points de discontinuité, car $\chi_A(x)$ change de valeur (de 0 à 1 ou de 1 à 0) à ces bornes.
- Cependant, χ_A peut aussi être discontinue à d'autres points si A a une frontière plus complexe (comme dans le cas d'un ouvert dense dans $[0, 1]$, où les points de discontinuité incluent tout $[0, 1] \setminus A$).

3. "Ces points sont en nombre au plus dénombrable."

Cette affirmation est correcte dans un sens restreint :

- Les bornes a_i et b_i des intervalles ouverts qui forment A sont en nombre au plus dénombrable. Cela découle du fait que A est une union dénombrable de segments ouverts disjoints.

Cependant, si A est un ouvert pathologique (par exemple, un ouvert dense où $[0, 1] \setminus A$ a une mesure positive), les points de discontinuité de χ_A ne se limitent pas à $\{a_i, b_i\}$. Dans ce cas, l'ensemble des points de discontinuité de χ_A peut avoir une mesure positive.

4. "Un ensemble dénombrable a une mesure de Lebesgue nulle."

Cette affirmation est correcte : tout ensemble dénombrable a une mesure de Lebesgue nulle.

Cependant, l'erreur potentielle est d'en déduire que les **points de discontinuité** de χ_A ont toujours une mesure nulle simplement parce que $\{a_i, b_i\}$ est dénombrable. Si la frontière de A contient un ensemble non dénombrable (comme dans le cas d'un ouvert dense), alors l'ensemble des points de discontinuité de χ_A peut avoir une mesure strictement positive.

Ce qui n'est pas totalement vrai

- Omission des points de discontinuité hors $\{a_i, b_i\}$:** Si A est un ouvert pathologique (par exemple, dense dans $[0, 1]$), la frontière ∂A peut être bien plus grande que les bornes des intervalles $\{a_i, b_i\}$, et les points de discontinuité de χ_A incluront tous les points de ∂A .
- Implication sur l'intégrabilité Riemannienne :** Dire que χ_A est Riemann intégrable uniquement parce que $\{a_i, b_i\}$ est dénombrable est faux. Ce qui compte, c'est si **toute la frontière** de A (et donc l'ensemble des points de discontinuité de χ_A) a une mesure nulle.

Correction nécessaire

Pour qu'un ouvert $A \subset [0, 1]$ ait une fonction caractéristique χ_A Riemann intégrable, il ne suffit pas que les bornes des intervalles soient dénombrables. Il faut vérifier que la **frontière entière** de A a une mesure de Lebesgue nulle.