

Montrer que le sous groupe  $H$  de  $S_5$  engendré par  $(1\ 3)$  et  $(2\ 4\ 5)$  contient un élément d'ordre 6

🌀 Pour montrer que le sous-groupe  $H$  de  $S_5$ , engendré par les permutations  $(1\ 3)$  et  $(2\ 4\ 5)$ , contient un élément d'ordre 6, on va examiner les éléments qui peuvent être obtenus en combinant ces deux générateurs.

1. **Déterminons l'ordre de chaque générateur :**

- La permutation  $(1\ 3)$  est une transposition, donc son ordre est 2.
- La permutation  $(2\ 4\ 5)$  est un cycle de longueur 3, donc son ordre est 3.

2. **Cherchons l'ordre du produit  $(1\ 3)(2\ 4\ 5)$  :**

- Pour déterminer l'ordre d'un élément, il faut trouver la plus petite puissance de cet élément qui donne l'identité.
- Le produit  $(1\ 3)(2\ 4\ 5)$  est une permutation de  $S_5$ , et comme  $(1\ 3)$  et  $(2\ 4\ 5)$  sont disjoints (n'agissent pas sur les mêmes éléments), l'ordre de leur produit est le **PPCM des ordres** de  $(1\ 3)$  et  $(2\ 4\ 5)$ .

Donc :

$$\text{Ordre de } (1\ 3)(2\ 4\ 5) = \text{PPCM}(2, 3) = 6.$$

3. **Conclusion :** L'élément  $(1\ 3)(2\ 4\ 5)$  a un ordre de 6, ce qui signifie qu'il est d'ordre 6. Par conséquent, le sous-groupe  $H$  contient un élément d'ordre 6, qui est  $(1\ 3)(2\ 4\ 5)$ .

H est il cyclique ?

🌀 Non, le sous-groupe  $H$  de  $S_5$  engendré par  $(1\ 3)$  et  $(2\ 4\ 5)$  n'est pas cyclique.

Pour qu'un groupe soit cyclique, il doit exister un élément  $g$  dans le groupe tel que tout élément du groupe puisse être exprimé comme une puissance de  $g$ . Autrement dit, il doit exister un seul générateur pour tout le groupe.

**Arguments pour montrer que  $H$  n'est pas cyclique :**

1. **Ordre de  $H$  :**

- Les éléments  $(1\ 3)$  et  $(2\ 4\ 5)$  sont des permutations disjointes, donc ils engendrent un sous-groupe isomorphe à  $Z_2 \times Z_3$ , de sorte que l'ordre de  $H$  est le produit des ordres de  $(1\ 3)$  et  $(2\ 4\ 5)$ , c'est-à-dire  $2 \times 3 = 6$ .
- Ainsi,  $H$  a un ordre de 6.

2. **Absence d'un élément générateur unique d'ordre 6 :**

- Dans  $H$ , l'élément  $(1\ 3)(2\ 4\ 5)$  a bien un ordre de 6, mais il ne génère pas tous les éléments de  $H$  uniquement par ses puissances, car  $H$  contient aussi des éléments d'ordres 2 et 3 qui ne peuvent pas tous être obtenus comme puissances de  $(1\ 3)(2\ 4\ 5)$  seul.
- Par exemple,  $(1\ 3)$  et  $(2\ 4\ 5)$  eux-mêmes ne peuvent pas être obtenus uniquement en prenant des puissances de  $(1\ 3)(2\ 4\ 5)$ .

**Conclusion**

Le sous-groupe  $H$  n'est donc pas cyclique, car il ne peut pas être engendré par un seul élément d'ordre 6.

Peut on construire un élément d'ordre 6 dans  $S_4$  ?



Oui, il est possible de construire un élément d'ordre 6 dans  $S_4$ .

Dans  $S_4$ , pour qu'un élément ait un ordre de 6, il doit être la composition d'un cycle de longueur 3 (qui a un ordre de 3) et d'une transposition (qui a un ordre de 2). Comme les deux parties doivent être disjointes, leur produit aura un ordre égal au **PPCM de 3 et 2**, soit 6.

### **Exemple de construction d'un élément d'ordre 6 dans $S_4$**

Prenons les permutations suivantes :

- $(1\ 2\ 3)$ , qui est un cycle de longueur 3 (ordre 3),
- $(3\ 4)$ , qui est une transposition (ordre 2).

Le produit de ces deux permutations disjointes,  $(1\ 2\ 3)(3\ 4)$ , a un ordre de :

$$\text{PPCM}(3, 2) = 6.$$

### **Vérification**

L'élément  $(1\ 2\ 3)(3\ 4)$  a donc bien un ordre de 6, et il est un élément de  $S_4$  d'ordre 6.