

Peux tu donner un équivalent simple quand $x \rightarrow 1^-$ de $\sum_{n=2}^{+\infty} \frac{x^n}{n \log(n)}$?

Oui. On peut donner un équivalent simple.

Quand $x \rightarrow 1^-$, on a

$$\sum_{n=2}^{+\infty} \frac{x^n}{n \log n} \sim \log\left(\log \frac{1}{1-x}\right).$$

Idée de justification (esquisse)

Écris $x = e^{-t}$ avec $t \rightarrow 0^+$. La somme est bien approchée par l'intégrale

$$\sum_{n \geq 2} \frac{e^{-tn}}{n \log n} \approx \int_2^{+\infty} \frac{e^{-tn}}{n \log n} dn.$$

Après le changement de variable $u = tn$, on obtient une intégrale du type

$$\int \frac{du}{u(\log u - \log t)},$$

dont le comportement dominant est

$$\log\left(\log \frac{1}{t}\right).$$

Or $t = -\log x \sim 1 - x$ lorsque $x \rightarrow 1^-$.

Conclusion

$$\sum_{n=2}^{+\infty} \frac{x^n}{n \log n} \sim \log\left(\log \frac{1}{1-x}\right) \quad (x \rightarrow 1^-)$$

Si tu veux, je peux aussi te donner un équivalent plus précis (avec constante additive).



Peux tu me donner une référence bibliographique pour ce calcul ?

Oui — voici **des références bibliographiques classiques et pertinentes** où tu peux trouver (ou déduire) rigoureusement l'équivalent asymptotique de séries génératrices comme

$$\sum_{n=2}^{\infty} \frac{x^n}{n \log n} \quad \text{lorsque } x \rightarrow 1^-,$$

en particulier grâce aux théorèmes *Taubériens* ou à l'analyse des singularités.

Références générales sur l'asymptotique des séries génératrices

1) Flajolet & Sedgewick — *Analytic Combinatorics*

- Philippe Flajolet & Robert Sedgewick, *Analytic Combinatorics*, Cambridge University Press (2009). [Groklopedia](#)

Ce livre développe en profondeur la théorie des **fonctions génératrices analytiques**, l'extraction d'asymptotiques à partir des **singularités** au bord du cercle de convergence, et les méthodes de *singularity analysis*. La série $\sum x^n / (n \log n)$ est un exemple typique de **singularité logarithmique** (cf. chapitres sur les fonctions avec croissance logarithmique près de $z = 1$). [algo.inria.fr](#)

Références sur les théorèmes taubériens

2) Hardy & Littlewood — *Tauberian Theory*

- G. H. Hardy & J. E. Littlewood, travaux sur les théorèmes *Taubériens*. Voir l'énoncé du **théorème taubérien de Hardy–Littlewood** qui relie le comportement de $\sum a_n x^n$ lorsque $x \rightarrow 1^-$ à celui de la somme partielle $\sum_{n \leq N} a_n$ lorsque $N \rightarrow \infty$. [Wikipédia](#)
 - E. C. Titchmarsh, *The Theory of Functions*, Oxford University Press, particulièrement la section sur les théorèmes taubériens et Abel–Tauber. [Wikipédia](#)
-

3) Wiener–Ikehara Theorem

- Shikao Ikehara, *An extension of Landau's theorem in the analytic theory of numbers* (1931).

Ce résultat taubérien est souvent utilisé pour connecter un comportement singulier de séries comme $\sum a_n e^{-ny}$ à un comportement asymptotique de $\sum_{n \leq X} a_n$.

Wikipédia

Des versions modernes se trouvent dans presque tous les manuels d'analyse complexe ou de théorie analytique des nombres.

Articles et contextes avancés

4) Asymptotics of algebraico-logarithmic generating functions

- T. Greenwood & T. Larson (2024), *Asymptotics of bivariate algebraico-logarithmic generating ...* arXiv 2024. arXiv

Cet article illustre des techniques modernes pour extraire des asymptotiques quand les génératrices ont des termes logarithmiques proches de leurs singularités — ce qui est directement pertinent à la série que tu étudies.

Conseils pour la lecture

- **Flajolet & Sedgewick** te donnera une méthode *générale* très puissante d'analyse des séries à singularités log-arithmiques. Grokopedia
- **Titchmarsh / Hardy-Littlewood** te donne les justifications théoriques taubériennes pour passer de comportements de séries à ceux des coefficients. Wikipédia
- La littérature sur les **théorèmes taubériens** (Wiener–Ikehara, Hardy–Littlewood, Karamata) est très standard dans les livres d'analyse complexe / théorie des séries entières.

Si tu veux, je peux te donner **des références précises (pages/chapitres)** pour l'application à $\sum x^n / (n \log n)$ dans ces ouvrages !

     ...  Sources

Is this conversation helpful so far?

