

Peut tu répondre à la question ci dessous, comme le ferait un étudiant modèle d'un cours "Logique et arithmétique" de première année de Licence maths:

Soient A et B deux ensembles.

1) Montrer que $\mathcal{P}(A) \cap \mathcal{P}(B) = \mathcal{P}(A \cap B)$ ($\mathcal{P}(A)$ désigne l'ensemble des parties de A).

2) Trouver deux ensembles A, B tels que $\mathcal{P}(A \cup B) \neq \mathcal{P}(A) \cup \mathcal{P}(B)$.

On note $\mathcal{P}(A)$ (ou $\mathcal{P}(A)$) l'ensemble des parties de A , c'est-à-dire

$$\mathcal{P}(A) = \{X \mid X \subseteq A\}.$$

1) Montrer que $\mathcal{P}(A) \cap \mathcal{P}(B) = \mathcal{P}(A \cap B)$

On procède par double inclusion.

(i) Inclusion $\mathcal{P}(A) \cap \mathcal{P}(B) \subseteq \mathcal{P}(A \cap B)$

Soit $X \in \mathcal{P}(A) \cap \mathcal{P}(B)$.

Par définition de l'intersection,

$$X \in \mathcal{P}(A) \quad \text{et} \quad X \in \mathcal{P}(B).$$

Donc :

$$X \subseteq A \quad \text{et} \quad X \subseteq B.$$

Ainsi, tout élément de X appartient à A et à B , donc

$$X \subseteq A \cap B.$$

Par définition de l'ensemble des parties,

$$X \in \mathcal{P}(A \cap B).$$

Donc :

$$\mathcal{P}(A) \cap \mathcal{P}(B) \subseteq \mathcal{P}(A \cap B).$$

(ii) Inclusion $\mathcal{P}(A \cap B) \subseteq \mathcal{P}(A) \cap \mathcal{P}(B)$

Soit $X \in \mathcal{P}(A \cap B)$.

Alors :

$$X \subseteq A \cap B.$$

Donc tout élément de X appartient à A et à B .

Ainsi :

$$X \subseteq A \quad \text{et} \quad X \subseteq B.$$

Donc :

$$X \in \mathcal{P}(A) \quad \text{et} \quad X \in \mathcal{P}(B).$$

Par conséquent :

$$X \in \mathcal{P}(A) \cap \mathcal{P}(B).$$

Donc :

$$\mathcal{P}(A \cap B) \subseteq \mathcal{P}(A) \cap \mathcal{P}(B).$$

Conclusion

On a les deux inclusions, donc :

$$\boxed{\mathcal{P}(A) \cap \mathcal{P}(B) = \mathcal{P}(A \cap B)}.$$

2) Trouver A, B tels que $\mathcal{P}(A \cup B) \neq \mathcal{P}(A) \cup \mathcal{P}(B)$

Prenons un exemple simple :

$$A = \{1\}, \quad B = \{2\}.$$

Alors :

$$A \cup B = \{1, 2\}.$$

On calcule :

$$\mathcal{P}(A) = \{\emptyset, \{1\}\}$$

$$\mathcal{P}(B) = \{\emptyset, \{2\}\}$$

Donc :

$$\mathcal{P}(A) \cup \mathcal{P}(B) = \{\emptyset, \{1\}, \{2\}\}.$$

En revanche,

$$\mathcal{P}(A \cup B) = \mathcal{P}(\{1, 2\}) = \{\emptyset, \{1\}, \{2\}, \{1, 2\}\}.$$

On constate que l'ensemble $\{1, 2\}$ appartient à

$\mathcal{P}(A \cup B)$ mais n'appartient pas à

$\mathcal{P}(A) \cup \mathcal{P}(B)$.

Donc :

$$\boxed{\mathcal{P}(A \cup B) \neq \mathcal{P}(A) \cup \mathcal{P}(B)}.$$

Remarque

On a en général seulement l'inclusion :

$$\mathcal{P}(A) \cup \mathcal{P}(B) \subseteq \mathcal{P}(A \cup B),$$

mais l'égalité est fautive dès que A et B contiennent chacun au moins un élément qui

n'appartient pas à l'autre.

📄 📌 🗑️ ↕ 🔄 ...

Peux tu répondre à la question 1 en raisonnant par équivalence plutôt que de séparer chacune des inclusions et en justifiant chaque équivalence par un commentaire ?

On veut montrer :

$$\mathcal{P}(A) \cap \mathcal{P}(B) = \mathcal{P}(A \cap B).$$

On raisonne par **équivalence logique sur l'appartenance**.

Soit X un ensemble quelconque. Montrons :

$$X \in \mathcal{P}(A) \cap \mathcal{P}(B) \iff X \in \mathcal{P}(A \cap B).$$

(définition de l'intersection d'ensembles)

$$\iff X \subseteq A \text{ et } X \subseteq B$$

(définition de l'ensemble des parties : $X \in \mathcal{P}(A)$ signifie $X \subseteq A$)

$$\iff \forall x (x \in X \Rightarrow x \in A) \text{ et } \forall x (x \in X \Rightarrow x \in B)$$

(définition de l'inclusion)

$$\iff \forall x (x \in X \Rightarrow (x \in A \text{ et } x \in B))$$

(regroupement des deux implications en une seule)

$$\iff \forall x (x \in X \Rightarrow x \in A \cap B)$$

(définition de l'intersection $A \cap B$)

$$\iff X \subseteq A \cap B$$

(définition de l'inclusion)

$$\iff X \in \mathcal{P}(A \cap B)$$

(définition de l'ensemble des parties)

On a donc montré :

$$\forall X, X \in \mathcal{P}(A) \cap \mathcal{P}(B) \iff X \in \mathcal{P}(A \cap B).$$

Par **principe d'extensionnalité des ensembles**, deux ensembles sont égaux s'ils ont les

mêmes éléments.

Ainsi :

$$\boxed{\mathcal{P}(A) \cap \mathcal{P}(B) = \mathcal{P}(A \cap B)}.$$

📄 📌 🗑️ ↕ 🔄 ...