ChatGPT ✦ Obtenir Plus ×

Voici ci-dessous une preuve (d'un exposé d'étudiant) qu'une application continue f:[a,b]→ℝ atteint son sup. Peux tu me l'expliquer ?

Soit M=sup_{x∈[a,b]} (f(x)). Pour chaque entier n>0 il existe y_n tel que M-1/n ≤ y_n ≤ M.
La suite (y_n) est bornée donc admet une valeur d'adhérence y. Il existe ψ strictement croissante ℕ → ℕ tel que y_{ψ(n)} converge vers y. Alors (f(y_n)) converge vers f(y) d'une part et (f(y_n)) converge vers M donc f(y)=M.

Merci pour ta question 😊 Je vais reprendre la preuve **pas à pas**, en expliquant l'idée derrière chaque ligne, parce que dans la version que tu donnes il y a un petit flou de notation (on mélange un peu les valeurs et les points).

🎯 Objectif

Montrer que si
$f : [a, b] \to \mathbb{R}$ est **continue**,

alors elle **atteint son supremum**, c'est-à-dire :

$$\exists c \in [a, b] \quad \text{tel que} \quad f(c) = \sup_{x\in[a,b]} f(x).$$

⚠️ Petite correction de notation

Dans la preuve que tu cites, il est écrit :

> pour chaque n il existe y_n tel que
> $M - 1/n \le y_n \le M$

Mais ce n'est pas cohérent :
y_n doit être un **point de l'intervalle**, pas une valeur réelle quelconque proche de M.

La version correcte est :

> Pour chaque n, il existe $x_n \in [a, b]$ tel que
> $$M - \frac{1}{n} \le f(x_n) \le M.$$

Autrement dit : on choisit des **points** dont les images sont de plus en plus proches du supremum.

🧠 Idée intuitive

On fait ceci :

1. On approche le supremum par des valeurs de plus en plus proches.
2. Les points correspondants forment une suite dans $[a, b]$.
3. Comme l'intervalle est fermé et borné → la suite admet une sous-suite convergente.
4. On utilise la continuité pour passer à la limite.
5. On obtient un point où la fonction vaut exactement M.

📌 Étape 1 — Construction d'une suite qui approche M

On pose :

$$M = \sup_{x\in[a,b]} f(x)$$

Par définition du supremum :

Pour tout n, il existe $x_n \in [a, b]$ tel que

$$M - \frac{1}{n} \le f(x_n) \le M.$$

Donc :

$$f(x_n) \to M.$$

On a donc construit une suite dont les **valeurs** se rapprochent de M.

📌 Étape 2 — Extraire une sous-suite convergente

La suite (x_n) est dans $[a, b]$, qui est :

- fermé
- borné

Donc par le théorème de Bolzano–Weierstrass :

> Toute suite bornée de ℝ admet une sous-suite convergente.

Donc il existe :

- une sous-suite $x_{\psi(n)}$
- qui converge vers un certain $x \in [a, b]$

📌 Étape 3 — Utiliser la continuité

On sait :

$$x_{\psi(n)} \to x$$

Et f est continue, donc :

$$f(x_{\psi(n)}) \to f(x)$$

Mais on savait déjà que :

$$f(x_n) \to M$$

Donc aussi :

$$f(x_{\psi(n)}) \to M$$

On a donc deux limites pour la même suite :

$$f(x_{\psi(n)}) \to f(x)$$

et

$$f(x_{\psi(n)}) \to M$$

Donc :

$$f(x) = M.$$

🎉 Conclusion

On a trouvé $x \in [a, b]$ tel que :

$$f(x) = M.$$

Donc le supremum est atteint.

🌟 Ce qui est vraiment essentiel dans la preuve

Deux ingrédients fondamentaux :

1. **Compacité de [a,b]**
   → toute suite a une sous-suite convergente.
2. **Continuité**
   → on peut passer la limite à travers f.

Sans l'un des deux, la preuve s'effondre.

🔎 Intuition profonde

On peut résumer l'idée en une phrase :

> On prend des points où f est presque maximale,
> on les rapproche grâce à la compacité,
> puis la continuité oblige la valeur limite à être exactement maximale.
