

Soit F le sous-espace vectoriel de \mathbb{R}^4 d'équation $x-y+z+t=0$ et G celui d'équation $x+y-z+3t=0$. Trouve une base de $F \cap G$.

On cherche une base de $F \cap G$, c'est-à-dire l'ensemble des vecteurs de \mathbb{R}^4 qui satisfont simultanément les deux équations :

$$x - y + z + t = 0$$

$$x + y - z + 3t = 0$$

1. Résolution du système

On résout le système :

$$\begin{cases} x - y + z + t = 0 \\ x + y - z + 3t = 0 \end{cases}$$

On additionne les deux équations :

$$(x - y + z + t) + (x + y - z + 3t) = 0$$

$$2x + 4t = 0 \Rightarrow x = -2t$$

Puis, on soustrait la deuxième équation de la première :

$$(x - y + z + t) - (x + y - z + 3t) = 0$$

$$-2y + 2z - 2t = 0$$

$$y - z + t = 0 \Rightarrow y = z - t$$

2. Paramétrisation de $F \cap G$

On exprime toutes les variables en fonction de z et t :

$$x = -2t, \quad y = z - t, \quad z = z, \quad t = t.$$








On pose $z = \lambda$ et $t = \mu$, où $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$, et on écrit les vecteurs solutions sous forme paramétrique :

$$(x, y, z, t) = \lambda(0, 1, 1, 0) + \mu(-2, -1, 0, 1).$$

3. Conclusion

Les vecteurs $\mathbf{v}_1 = (0, 1, 1, 0)$ et $\mathbf{v}_2 = (-2, -1, 0, 1)$ forment une base de $F \cap G$.

Ainsi, $\dim(F \cap G) = 2$.

< 2/2 >       

Complète la famille (v_1, v_2) ci-dessus en une base (v_1, v_2, f_3) de F .

Nous allons compléter la famille $\{v_1, v_2\}$ pour obtenir une base de F .

1. Rappel des équations de F

Le sous-espace F est défini par l'équation :

$$x - y + z + t = 0.$$

Cela signifie que les vecteurs de F ont la forme :

$$(x, y, z, t) = \lambda v_1 + \mu v_2 + \nu f_3.$$

Nous devons ajouter un troisième vecteur f_3 qui soit dans F mais pas dans $F \cap G$.

2. Recherche d'un vecteur supplémentaire dans F

Nous cherchons un vecteur (x, y, z, t) vérifiant l'équation de F mais qui ne soit pas une combinaison linéaire de $v_1 = (0, 1, 1, 0)$ et $v_2 = (-2, -1, 0, 1)$.

On impose une forme générale :

$$x - y + z + t = 0.$$

On prend $t = 1, z = 0$, et on choisit $x = 1$, alors :

$$1 - y + 0 + 1 = 0 \Rightarrow y = 2.$$

Donc, un candidat pour f_3 est :

$$f_3 = (1, 2, 0, 1).$$

3. Vérification de l'indépendance linéaire

On doit vérifier que f_3 ne s'exprime pas comme combinaison linéaire de v_1 et v_2 , c'est-à-dire que l'équation :

$$\alpha(0, 1, 1, 0) + \beta(-2, -1, 0, 1) = (1, 2, 0, 1)$$

n'a pas de solution. En développant les composantes :

- $-2\beta = 1 \Rightarrow \beta = -\frac{1}{2}$.
- $\alpha - \beta = 2 \Rightarrow \alpha + \frac{1}{2} = 2 \Rightarrow \alpha = \frac{3}{2}$.
- $\alpha = 0$, contradiction.

Puisque cette équation est impossible, cela prouve que f_3 est linéairement indépendant de v_1 et v_2 .

4. Conclusion

La base (v_1, v_2, f_3) de F est donc :

$$\{(0, 1, 1, 0), (-2, -1, 0, 1), (1, 2, 0, 1)\}.$$

Pourquoi avoir choisi $t=1, z=0$ et $x=1$ pour f_3 ?

Bonne question ! Le choix de $t = 1, z = 0$ et $x = 1$ pour f_3 n'est pas unique, mais il facilite la recherche d'un vecteur qui n'est pas combinaison linéaire de v_1 et v_2 .

1. Objectif : Trouver un vecteur supplémentaire dans F

On cherche un vecteur $f_3 = (x, y, z, t)$ qui satisfait l'équation de F :

$$x - y + z + t = 0.$$

et qui **ne soit pas une combinaison linéaire** de $v_1 = (0, 1, 1, 0)$ et $v_2 = (-2, -1, 0, 1)$.

2. Pourquoi choisir $t = 1$ et $z = 0$?

Nous avons déjà deux vecteurs dans F qui contiennent z et t .

- $v_1 = (0, 1, 1, 0)$ implique que z est utilisé.
- $v_2 = (-2, -1, 0, 1)$ implique que t est utilisé.

Pour éviter de créer une dépendance linéaire immédiate, il est **stratégique** de fixer certaines coordonnées à des valeurs simples.

- Fixer $t = 1$** : Cela nous aide à éviter d'avoir un f_3 aligné sur v_2 qui a aussi un t non nul.
- Fixer $z = 0$** : Cela nous empêche de trop ressembler à v_1 , qui contient un $z = 1$.
- Choisir $x = 1$** : Nous avons encore un degré de liberté pour choisir x , donc on prend une valeur simple qui n'est ni 0 ni un multiple évident de v_1 ou v_2 .

3. Calcul de y

Avec ces choix, on impose l'équation de F :

$$x - y + z + t = 0.$$

$$1 - y + 0 + 1 = 0 \Rightarrow y = 2.$$







Donc, on obtient $f_3 = (1, 2, 0, 1)$.

4. Pourquoi ce choix garantit-il l'indépendance ?

Avec ces choix, on a évité que f_3 soit une simple combinaison de v_1 et v_2 . On a ensuite vérifié que l'équation $\alpha v_1 + \beta v_2 = f_3$ n'a pas de solution, ce qui prouve l'indépendance.

Conclusion

Ce choix est **une méthode parmi d'autres**. On aurait pu essayer d'autres valeurs, mais cette approche permet d'obtenir rapidement un vecteur qui respecte l'équation de F tout en évitant les combinaisons linéaires évidentes.

Envoyer un message à ChatGPT

