

Soit  $f:A \rightarrow B$  une application entre ensembles et  $X \subset A$ . On veut montrer  $X \subset f^{-1}(f(X))$  et montrer par un exemple que l'inclusion peut être stricte. La réponse ci-dessous est elle correcte ?

On a  $f^{-1}(f(X)) = \{x \in A, f(x) \in f(X)\} = \{x \in A, f(x) \in \{f(t), t \in X\}\}$  contient  $X$ .

Exemple : Supposons  $f$  constante et prenons  $X = \{a\}$  pour un  $a \in A$  alors  $f^{-1}(f(X)) = A$  contient strictement  $X$ .

Oui, ta réponse est **correcte sur le fond**, mais on peut la rendre un peu plus rigoureuse dans la rédaction. Regardons ça proprement.

## 1 Montrer que $X \subset f^{-1}(f(X))$

Tu écris :

$f^{-1}(f(X)) = \{x \in A \mid f(x) \in f(X)\} = \{x \in A \mid f(x) \in \{f(t), t \in X\}\}$  contient  $X$ .

L'idée est bonne, mais il faut justifier l'inclusion.

### Démonstration rigoureuse

Soit  $x \in X$ .

Alors, par définition de l'image directe :

$$f(x) \in f(X).$$

Donc, par définition de l'image réciproque :

$$x \in f^{-1}(f(X)).$$

Ainsi,

$$X \subset f^{-1}(f(X)).$$

✓ L'argument est donc correct — il manquait juste la phrase logique explicite.

## 2 Exemple où l'inclusion est stricte

Tu proposes :

Supposons  $f$  constante et prenons  $X = \{a\}$ . Alors  $f^{-1}(f(X)) = A$ .

C'est **tout à fait correct**.

En effet :

- Si  $f$  est constante, il existe  $b \in B$  tel que  $f(x) = b$  pour tout  $x \in A$ .
- Alors  $f(X) = \{b\}$ .
- Donc

$$f^{-1}(f(X)) = f^{-1}(\{b\}) = A.$$

Et si  $X = \{a\}$  avec  $A$  ayant au moins deux éléments, alors

$$X \subsetneq A = f^{-1}(f(X)).$$

Donc l'inclusion est stricte.

## ✓ Conclusion

✓ Ton raisonnement est **mathématiquement juste**.

🔍 Il faudrait simplement rendre la première partie un peu plus explicite dans la justification logique.

Si tu veux, je peux te proposer une version « rédaction examen » parfaitement propre.

📄 👍 🗨️ ⬆️ 🔄 ⋮

Oui donne moi une version « rédaction examen »

Voici une version propre, concise et adaptée à une **rédaction d'examen** :

### Exercice

Soit  $f : A \rightarrow B$  une application et  $X \subset A$ .

#### 1) Montrer que $X \subset f^{-1}(f(X))$

Soit  $x \in X$ .

Par définition de l'image directe, on a

$$f(x) \in f(X).$$

Par définition de l'image réciproque, cela implique

$$x \in f^{-1}(f(X)).$$

Ainsi, tout élément de  $X$  appartient à  $f^{-1}(f(X))$ .

On en déduit donc :

$$X \subset f^{-1}(f(X)).$$

#### 2) Exemple où l'inclusion est stricte

Supposons que l'application  $f$  soit constante, c'est-à-dire qu'il existe  $b \in B$  tel que

$$f(x) = b \quad \text{pour tout } x \in A.$$

Soit  $a \in A$  et posons  $X = \{a\}$ .

Alors

$$f(X) = \{b\}.$$

Par conséquent,

$$f^{-1}(f(X)) = f^{-1}(\{b\}) = A.$$

Si  $A$  contient au moins deux éléments, on a alors

$$X \subsetneq A = f^{-1}(f(X)).$$

L'inclusion peut donc être stricte.

Si tu veux, je peux aussi te donner la propriété générale caractérisant le cas d'égalité (indice : injectivité).

📄 👍 🗨️ ⬆️ 🔄 ⋮

