

Soit (u_n) une suite de nombres réels décroissante et sommable. Peux-tu démontrer que le produit $n u_n$ tend vers 0 ?

Réflexion durant 11s >

Oui — sous l'hypothèse standard que $u_n \geq 0$ pour tout n (suite décroissante et à termes non négatifs). Voici une démonstration classique par condensation de Cauchy.

1. Condensation de Cauchy.

Comme (u_n) est décroissante et $u_n \geq 0$, pour tout $k \geq 0$ et tout n tel que $2^k \leq n < 2^{k+1}$ on a $u_n \leq u_{2^k}$. Donc, en sommant sur les 2^k indices $n = 2^k, \dots, 2^{k+1} - 1$,

$$\sum_{n=2^k}^{2^{k+1}-1} u_n \leq 2^k u_{2^k}.$$

D'autre part, pour tout k ,

$$2^k u_{2^{k+1}-1} \leq \sum_{n=2^k}^{2^{k+1}-1} u_n,$$

donc, en regroupant,

$$\sum_{k=0}^{\infty} 2^k u_{2^{k+1}-1} \leq \sum_{n=1}^{\infty} u_n \leq \sum_{k=0}^{\infty} 2^k u_{2^k}.$$

Ainsi la série $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ converge si et seulement si la série $\sum_{k=0}^{\infty} 2^k u_{2^k}$ converge (c'est la **condensation de Cauchy**).

2. Conséquence sur les termes.

Si $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ converge, alors $\sum_{k=0}^{\infty} 2^k u_{2^k}$ converge; par conséquent les termes de cette dernière série tendent vers 0 :

$$2^k u_{2^k} \xrightarrow[k \rightarrow \infty]{} 0.$$

3. Conclusion $n u_n \rightarrow 0$.

Pour tout $n \geq 1$, soit k l'entier tel que $2^k \leq n < 2^{k+1}$. Alors, en utilisant la décroissance,

$$n u_n \leq 2^{k+1} u_{2^k} = 2 (2^k u_{2^k}).$$

Comme $2^k u_{2^k} \rightarrow 0$, la quantité à droite tend vers 0 quand $k \rightarrow \infty$, donc $n u_n \rightarrow 0$ quand $n \rightarrow \infty$.

Remarque : la démonstration ci-dessus nécessite $u_n \geq 0$. Si la suite est décroissante mais peut prendre des signes, la conclusion n'est pas valable sans hypothèses supplémentaires (la propriété est classique pour suites décroissantes à **termes positifs**).

Peut-on trouver une suite décroissante sommable ayant des termes négatifs ?

Réflexion durant 16s >

Court et précis : **non** (sauf le cas dégénéré où la suite devient finalement nulle).

Preuve. Soit (u_n) décroissante et telle que la série $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ converge. Alors nécessairement $u_n \rightarrow 0$. Supposons qu'il existe k tel que $u_k < 0$. Comme la suite est décroissante, pour tout $n \geq k$ on a

$$u_n \leq u_k < 0,$$

donc la suite (u_n) admet une limite $L \leq u_k < 0$, ce qui contredit $u_n \rightarrow 0$. Ainsi il n'existe aucun k avec $u_k < 0$: tous les termes sont ≥ 0 .

Le seul cas « autorisé » où apparaîtraient des zéros est le cas finitement constant nulle : si pour un certain N on a $u_N = 0$, alors pour $n \geq N$ on doit avoir $u_n \leq 0$; d'après ce qui précède on obtient $u_n = 0$ pour tout $n \geq N$.

Donc une suite décroissante sommable ne peut avoir de termes strictement négatifs (sauf la suite finalement nulle, qui n'a pas de termes négatifs non nuls).

Soit f une fonction sur un espace mesuré (X, μ) à valeur dans \mathbb{R} , intégrable. On note " $f \geq n$ " l'ensemble $\{x \in X, f(x) \geq n\}$. Peux-tu déduire de ce qui précède que le produit $n \mu(\{f \geq n\})$ tend vers 0 ?

Réflexion durant 9s >

Oui — tout à fait. Voici une démonstration courte et nette qui reprend l'argument discret précédent.

1. Réduction au cas $f \geq 0$.

Posons $f^+ = \max(f, 0)$. Comme f est intégrable, f^+ est intégrable (la partie positive est finie). Pour tout $n \geq 1$ on a

$$\{x \in X : f(x) \geq n\} \subset \{x \in X : f^+(x) \geq n\},$$

donc il suffit de montrer la propriété pour f^+ . Ainsi on peut supposer $f \geq 0$.

2. Suites décroissante et sommable.

Pour $n \geq 1$ posons $u_n = \mu(\{x : f(x) \geq n\})$. La suite (u_n) est décroissante (en n). De plus, pour tout $x \geq 0$,

$$\sum_{n=1}^{\infty} \mathbf{1}_{\{f(x) \geq n\}} = \lfloor f(x) \rfloor \leq f(x).$$

Par Tonelli (ou la convergence monotone) on intègre cette inégalité :

$$\sum_{n=1}^{\infty} u_n = \sum_{n=1}^{\infty} \int \mathbf{1}_{\{f \geq n\}} d\mu = \int \sum_{n=1}^{\infty} \mathbf{1}_{\{f \geq n\}} d\mu \leq \int f d\mu < \infty.$$

Donc (u_n) est une suite décroissante à termes non négatifs et la série $\sum u_n$ converge.

3. Application du résultat discret.

Par le résultat déjà démontré pour les suites décroissantes sommables on en déduit

$$n u_n = n \mu(\{x : f(x) \geq n\}) \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0.$$

Conclusion : pour toute fonction intégrable f sur (X, μ) on a

$$n \mu(\{x \in X : f(x) \geq n\}) \longrightarrow 0 \quad (n \rightarrow \infty).$$

(Remarque : on a effectivement utilisé f^+ si f prend des valeurs négatives ; pour n grands les ensembles $\{f \geq n\}$ sont vides.)



D'où vient que pour n grand les ensembles $\{f \geq n\}$ sont vides ?

Bonne question — et en effet **ce n'est pas vrai** en général que les ensembles $\{f \geq n\}$ deviennent vides lorsque $n \rightarrow \infty$.

Un **contre-exemple immédiat** :

Prenons $X = \mathbb{R}_+$ avec la mesure de Lebesgue et

$$f(x) = \frac{1}{1+x}.$$

Alors f est intégrable, mais $\{f \geq n\}$ n'est vide que pour $n > 1$, donc pas forcément «pour $n \rightarrow \infty$ » au sens logique recherché.

Ou pire :

$$f(x) = \frac{1}{x}, \quad x \geq 1.$$

Cette fonction n'est pas intégrable mais montre bien l'idée : une fonction **peut être non bornée** tout en étant intégrable.

Donc **je corrige** ce que j'ai dit :

Dans la démonstration, on n'a *pas besoin* que les ensembles $\{f \geq n\}$ deviennent vides.

Il suffit qu'ils aient **mesure décroissante** et que leur série soit **sommable**.

Ce qui est vrai et suffisant

Pour $f \geq 0$ intégrable, nous avons montré :

$$u_n := \mu(\{f \geq n\}) \quad \text{et} \quad \sum_{n=1}^{\infty} u_n \leq \int f < \infty.$$

La suite (u_n) est décroissante, positive, **sommable**, donc

$$n u_n \longrightarrow 0.$$

A aucun moment on n'a besoin que $\{f \geq n\}$ soit vide.

Conclusion

→ Le résultat

$$n \mu(\{f \geq n\}) \rightarrow 0$$

vient uniquement du **principe de condensation** appliqué à la suite $u_n = \mu(\{f \geq n\})$, pas de l'hypothèse erronée « $\{f \geq n\}$ devient vide».

Si tu veux, je peux aussi te montrer comment généraliser cela à

$$t \mu(\{f \geq t\}) \rightarrow 0 \quad (t \rightarrow \infty),$$

ou encore relier cela à la formule de **Cavalieri / couches de niveau**.

📄 👍 🗨️ ↗️ ↻️ ...

Que penses tu de ta réponse à la deuxième question de notre chat "Vérification réponse étudiant" (dans la liste à gauche de l'interface, en voici le lien : <https://chatgpt.com/share/691b1e5b-a320-8009-8e26-6c70fa2ffcc3>) ? Si tu ne peux pas lire ce chat, j'en enverrai une impression pdf.

Je ne peux **pas accéder** à ce lien ni consulter d'autres chats — même s'ils apparaissent dans ta barre latérale.

Pour que je puisse répondre à ta question, il faudra donc que tu m'envoies **le texte pertinent**, par exemple :

- une **capture / impression PDF**,
- ou simplement un **copié-collé** de la réponse dont tu veux mon avis.


Dès que j'ai le contenu, je pourrai l'analyser précisément.



ChatGPT-ex7-7.pdf
PDF

Voici le pdf. Seul m'intéresse ta réponse à la deuxième question.

Réflexion durant 26s >

Merci — bonne remarque. Après relecture du PDF que tu as envoyé, je confirme que **ma réponse héroïque dans le PDF (affirmant qu'on peut construire un contre-exemple) est erronée.** (Je vois ton PDF et je m'y réfère. )

Voici la correction nette et la justification :

Rappel (déjà montré précédemment)

Pour $f \geq 0$ intégrable on pose

$$u_n := \mu(\{x \in X : f(x) \geq n\}).$$

Alors $(u_n)_{n \geq 1}$ est **décroissante**, $u_n \geq 0$ et

$$\sum_{n=1}^{\infty} u_n = \sum_{n=1}^{\infty} \int_X \mathbf{1}_{\{f \geq n\}} d\mu = \int_X \sum_{n=1}^{\infty} \mathbf{1}_{\{f \geq n\}} d\mu \leq \int_X f d\mu < \infty,$$

donc (u_n) est sommable.

Application du lemme discret (condensation / argument standard)

Il est classique (condensation de Cauchy / argument par puissances de 2) que si (u_n) est décroissante à valeurs ≥ 0 et $\sum u_n < \infty$, alors $nu_n \rightarrow 0$. Voici une preuve courte :

Pour $k \geq 0$ et tout n tel que $2^k \leq n < 2^{k+1}$ on a $u_n \leq u_{2^k}$. Donc

$$nu_n \leq 2^{k+1} u_{2^k} = 2 \cdot (2^k u_{2^k}).$$

Mais la sommabilité de (u_n) implique que la série $\sum_{k \geq 0} 2^k u_{2^k}$ converge (condensation de Cauchy), donc $2^k u_{2^k} \rightarrow 0$. Ainsi $nu_n \rightarrow 0$ quand $n \rightarrow \infty$.

Conclusion pour la question initiale

Appliqué à $u_n = \mu(\{f \geq n\})$ on obtient donc bien

$$n \mu(\{f \geq n\}) \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0.$$

Pourquoi l'« argument contraire » du PDF était faux

Le contre-exemple esquissé dans le PDF repose (implicitement) sur la construction d'une fonction sur un espace discret dont on «éparpille» des masses pour forcer $n\mu(\{f \geq n\})$ à rester loin de 0. **Ce qui échoue** dans cette construction, c'est la contrainte *obligatoire* que $u_n = \mu(\{f \geq n\})$ soit **décroissante**. Beaucoup de tentatives de contre-exemples produisent une suite de «masses» pour laquelle les quantités $\mu(\{f \geq n\})$ ne sont pas monotones, ou bien ne donnent pas l'intégrabilité $\sum_n u_n < \infty$ en même temps que la propriété $\liminf nu_n > 0$. Or la décroissance + sommabilité suffisent exactement pour forcer $nu_n \rightarrow 0$.

Si tu veux, je peux :

- donner la preuve complète de la condensation de Cauchy (si tu préfères une démonstration détaillée), ou
- vérifier point par point l'argument du PDF et indiquer précisément où est l'erreur de construction.

La première option est très rapide ; dis-moi laquelle tu veux.

Sources

