$E = \{ P \in \mathbb{R}[X],\ d^\circ P \leq 3 \text{ et } P(0) = 0 \}$

$E = \ker\left(\mathbb{R}_3[X] \to \mathbb{R},\ P \mapsto P(0)\right)$ est un sev de $\mathbb{R}_3[X]$

1 P de deg ≤ 3 s'écrit de façon unique $a_0 + a_1 X + a_2 X^2 + a_3 X^3$ avec $a_i \in \mathbb{R}$

$P(0) = 0 \Leftrightarrow a_0 = 0$ et alors P s'écrit de façon unique $a_1 X + a_2 X^2 + a_3 X^3$ autrement dit (X, X^2, X^3) est une base de E

2 $\phi_i(P) = P^{(i-1)}(1)$ est bien linéaire $\mathbb{R}[X] \to \mathbb{R}$ donc sa restriction à E définit un él^t de E^*

3. $(P_j)_{1 \leq j \leq 3}$ tq $\forall i, j \quad \phi_i(P_j) = \delta_{i,j}$

Supposons $a_1 P_1 + a_2 P_2 + a_3 P_3 = 0$ pour $a_1, a_2, a_3 \in \mathbb{R}$, alors $\phi_i(a_1 P_1 + a_2 P_2 + a_3 P_3) = a_1 \phi_i(P_1) + \dots + a_3 \phi_i(P_3)$

$$= a_1 \delta_{i,1} + a_2 \delta_{i,2} + a_3 \delta_{i,3}$$
$$= a_i$$

d'une part et $\phi_i(0) = 0$ d'autre part donc $a_i = 0$, $1 \leq i \leq 3$ ce qui montre que (P_1, P_2, P_3) est libre

4. On écrit $P_j = a_1^j X + a_2^j X^2 + a_3^j X^3$ alors $P_j(1) = a_1^j + a_2^j + a_3^j$

$$P_j'(1) = a_1^j + 2a_2^j + 3a_3^j$$
$$P_j''(1) = 2a_2^j + 6a_3^j$$

On veut $\underbrace{\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 3 \\ 0 & 2 & 6 \end{pmatrix}}_{A} \begin{pmatrix} a_1^j \\ a_2^j \\ a_3^j \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \delta_{1,j} \\ \delta_{2,j} \\ \delta_{3,j} \end{pmatrix}$ autrement dit $\begin{pmatrix} a_1^j \\ a_2^j \\ a_3^j \end{pmatrix} = j$ ème colonne de A^{-1}

d'où l'unicité, et l'existence si A est inversible ds $M_3(\mathbb{R})$

On calcule A^{-1} par échelonnage de A suivant les lignes : $A \xrightarrow[L_2 - L_1 \to L_2]{} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 2 & 6 \end{pmatrix} \xrightarrow[\substack{L_3 - 2L_2 \to L_3 \\ L_1 - L_2 \to L_1}]{} \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix} \xrightarrow[\frac{1}{2}L_3 \to L_3]{} \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \xrightarrow[\substack{L_2 - 2L_3 \to L_2 \\ L_1 + L_3 \to L_1}]{} I_3$

Alors A^{-1} est la transformée de I_3 suivant les lignes, puisque $\text{transf.}(I_3, op) A = \text{transf}(A, op) = I_3$

$I_3 \xrightarrow[L_2 - L_1 \to L_2]{} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \xrightarrow[\substack{L_3 - 2L_2 \to L_3 \\ L_1 - L_2 \to L_1}]{} \begin{pmatrix} 2 & -1 & 0 \\ -1 & 1 & 0 \\ 2 & -2 & 1 \end{pmatrix} \xrightarrow[\frac{1}{2}L_3 \to L_3]{} \begin{pmatrix} 2 & -1 & 0 \\ -1 & 1 & 0 \\ 1 & -1 & \frac{1}{2} \end{pmatrix} \xrightarrow[\substack{L_2 - 2L_3 \to L_2 \\ L_1 + L_3 \to L_1}]{} \begin{pmatrix} 3 & -2 & \frac{1}{2} \\ -3 & 3 & -1 \\ 1 & -1 & \frac{1}{2} \end{pmatrix}$

Conclusion $P_1 = 3X - 3X^2 + X^3$, $P_2 = -2X + 3X^2 - X^3$, $P_3 = \frac{1}{2}X - X^2 + \frac{1}{2}X^3$

5. E est de dimension $\text{card}(\{X, X^2, X^3\}) = 3$, (P_1, P_2, P_3) est libre de cardinal 3 ds E donc c'est une base de E

(ϕ_1, ϕ_2, ϕ_3) est la base duale de (P_1, P_2, P_3) c'est en particulier une base.

6. Puisque (P_1, P_2, P_3) est une base de E, $\operatorname{Ker} \phi_2 = \{ \alpha_1 P_1 + \alpha_2 P_2 + \alpha_3 P_3 \ ,\ \alpha_1, \alpha_2, \alpha_3 \in \mathbb{R} \text{ et } \underbrace{\phi_2(\alpha_1 P_1 + \alpha_2 P_2 + \alpha_3 P_3)}_{\alpha_1 \phi_2(P_1) + \dots + \alpha_3 \phi_2(P_3) = \alpha_2} = 0 \}$

$= \{ \alpha_1 P_1 + \alpha_3 P_3 \ ,\ \alpha_1 \alpha_3 \in \mathbb{R} \} = \operatorname{Vect}(P_1, P_3)$

7. $\Phi : P \mapsto P(1) X + P'(1) X^2 + P''(1) X^3 = \phi_1(P) X + \phi_2(P) X^2 + \phi_3(P) X^3$

$P \mapsto \phi_i(P) X^i$ est linéaire car composée de ϕ_i et de $\mathbb{R} \to E$, $\alpha \mapsto \alpha X^i$

Φ est la somme de trois appl. linéaire donc est linéaire.

$\Phi(X) = 1.X + 1.X^2$

$\Phi(X^2) = 1.X + 2.X^2 + 2.X^3$

$\phi(X^3) = 1.X + 3X^2 + 6X^3$

d'où $\operatorname{Mat}_{(X^i)}(\Phi) = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 3 \\ 0 & 2 & 6 \end{pmatrix}$ On reconnait A avec les notations de (4)

8. $A \times \operatorname{Mat}_{(X^i)}(P_1, P_2, P_3) = I_3$ d'après 4.

Commentaire : $\operatorname{Mat}_{(X^i)}(\Phi) = \begin{pmatrix} \operatorname{Mat}_{(X^i),(1)}(\phi_1) \\ \vdots \\ \operatorname{Mat}_{(X^i),(1)}(\phi_3) \end{pmatrix}$ et $\operatorname{Mat}_{(X^i),(1)}(\phi_i) \, [P_j]_{(X^i)} = \phi_i(P_j) = \delta_{ij}$

9. $E_1 = \{ P \in E,\ P(1-X) = P(1+X) \}$. $P \in E_1 \iff Q = P(1+X)$ vérifie $Q(-X) = P(1-X) = P(1+X) = Q(X)$

donc Q est somme de monôme de d° pair et est toujours de $d^\circ \leq 3$: $Q = a_0 + a_2 X^2$ en particulier $Q'(0) = 0$

d'où $P = Q(X-1) = a_0 + a_2 (X-1)^2$ $P'(1) = 0$ $\leadsto P \in \operatorname{Ker} \phi_2 = \operatorname{Vect}(P_1, P_3)$

10 $P \in E$ vérifiant $P(1-X) = P(1+X)$ alors $\underbrace{P(1-1)}_{P(0)=0} = P(1+1)$ donc $P(2) = 0$

En poursuivant 9 $P = a_0 + a_2 (X-1)^2$ On doit avoir $P(0) = 0$ donc $a_2 = -a_0$