Examen 15 dec 21

1.a $b : M_n(\mathbb{R})^2 \to M_n(\mathbb{R})$, $(A,B) \mapsto \mathrm{tr}(AB)$ est bien linéaire en A, en B ~~sans~~ par distributivité du produit et linéarité de la trace. De plus $\mathrm{tr}(AB) = \mathrm{tr}(BA)$: $\sum_i \sum_k a_{ik} b_{ki} = \sum_i \sum_k b_{ik} a_{ki}$

Soit A tq $\forall B$, $\mathrm{tr}(AB) = 0$. Prenons $B = E_{ij}$ matrice avec un 1 en position (i,j), 0 partout ailleurs.

Alors $AB = \begin{array}{c} \\ \\ \\ \end{array}\begin{array}{c} j \\ \left(\begin{matrix} 0 & a_{1,i} & 0 \\ & \vdots & \\ & a_{n,i} & \end{matrix}\right) \end{array}$ = $i$ème colonne de A en colonne j, 0 partout ailleurs. Donc $\mathrm{tr}(AB) = a_{j,i}$

$\mathrm{tr}(AB) = 0 \rightsquigarrow a_{j,i} = 0$, ceci quelque soit (i,j), donc $A = 0$

Ainsi la forme b est non dégénérée.

Soit $\phi : M_n(\mathbb{R}) \to M_n(\mathbb{R})^*$, $A \mapsto b(A,-)$. ϕ est linéaire par linéarité de $b(A,B)$ en A.

$\mathrm{Ker}\,\phi = \{0\}$ d'après ce qui précède donc ϕ est injectif. Comme $\dim M_n(\mathbb{R}) = \dim M_n(\mathbb{R})^*$, ~~donc~~ ϕ est de rang égal à $\dim M_n(\mathbb{R})^*$ donc ϕ est surjectif donc ϕ est un isomorphisme.

1.b $^t\left(\frac{1}{2}(A + {}^tA)\right) = \frac{1}{2}\left({}^tA + \underbrace{{}^t{}^tA}_{=A}\right) = \frac{1}{2}(A + {}^tA)$ donc $\frac{1}{2}(A+{}^tA)$ est symétrique

$^t\left(\frac{1}{2}(A - {}^tA)\right) = \frac{1}{2}\left({}^tA - \underbrace{{}^{tt}A}_{=A}\right) = -\frac{1}{2}(A - {}^tA)$ donc $\frac{1}{2}(A - {}^tA)$ est antisymétrique

$A = \frac{1}{2}(A + {}^tA) + \frac{1}{2}(A - {}^tA)$ est bien somme d'une matrice symétrique et d'une matrice antisymétrique.

Unicité. $A = S + T$ avec ${}^tS = S$ et ${}^tT = -T$ alors $A + {}^tA = S + T + \underbrace{{}^tS}_{S} + \underbrace{{}^tT}_{-T} = 2S$ donc $S = \frac{1}{2}(A + {}^tA)$

puis $T = A - \frac{1}{2}(A + {}^tA)$ d'où l'unicité de S et T.

1.c ~~Gardons~~ $S_n(\mathbb{R}) = \{A \in M_n(\mathbb{R}), A = {}^tA\}$ et $T_n(\mathbb{R}) = \{A \in M_n(\mathbb{R}), {}^tA = -A\}$ sont les noyaux des $A \mapsto A - {}^tA$ appl. linéaires

et ~~de~~ $A \mapsto A + {}^tA$ donc sont des sous-espaces vectoriels de $M_n(\mathbb{R})$

1.b dit exactement que $M_n(\mathbb{R}) = S_n(\mathbb{R}) \oplus T_n(\mathbb{R})$

Soit $S \in S_n(\mathbb{R})$ et $T \in T_n(\mathbb{R})$. Posons $A = S + T$ alors $S = \frac{1}{2}(A + {}^tA)$, $T = \frac{1}{2}(A - {}^tA)$

Alors $ST = \frac{1}{4}(A + {}^tA)(A - {}^tA) = \frac{1}{4}\left(A^2 - A{}^tA + {}^tAA - ({}^tA)^2\right)$ donc $\mathrm{tr}(ST) = \frac{1}{4}\mathrm{tr}(A^2) - \mathrm{tr}(A{}^tA) + \mathrm{tr}({}^tAA) - \mathrm{tr}(({}^tA)^2)$

Or $\mathrm{tr}(A{}^tA) = \mathrm{tr}({}^tAA)$ (même si $A{}^tA \neq {}^tAA$)

$({}^tA)^2 = {}^t(A^2)$ et $\mathrm{tr}({}^tA^2) = \mathrm{tr}(A^2)$

On obtient $\mathrm{tr}(ST) = 0$

On en déduit $T_n(\mathbb{R}) \subset S_n(\mathbb{R})^\perp$ et $S_n(\mathbb{R}) \subset T_n(\mathbb{R})^\perp$. Puisque b est non dégénérée, $\dim S_n(\mathbb{R})^\perp = \dim M_n(\mathbb{R}) - \dim S_n(\mathbb{R})$

Or $\dim M_n(\mathbb{R}) - \dim S_n(\mathbb{R}) = \dim T_n(\mathbb{R})$ puisque $S_n(\mathbb{R}) \oplus T_n(\mathbb{R}) = M_n(\mathbb{R})$, donc l'inclusion $T_n(\mathbb{R}) \subset S_n(\mathbb{R})^\perp$ est une égalité. De même l'inclusion $S_n(\mathbb{R}) \subset T_n(\mathbb{R})^\perp$ est une égalité.

1.d $\operatorname{tr}(AA) = \sum_{i=1}^{n}\left(\sum_{j=1}^{n} a_{ij}a_{ji}\right)$

$= \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} a_{ij}^2$ si A est symétrique auquel cas $\operatorname{tr}(AA) \geq 0$ et $\operatorname{tr}(AA)=0 \Leftrightarrow \forall i,j\ a_{ij}=0$

$= \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} -(a_{ij})^2$ si A est antisymétrique, auquel cas $\operatorname{tr}(AA) \leq 0$ et $\operatorname{tr}(AA)=0 \Leftrightarrow \forall i,j\ a_{i,j}=0$

On a donc $b|_{S_n(\mathbb{R})}$ est définie positive et $b|_{T_n(\mathbb{R})}$ est définie négative.

Soit $(e_i)_{1\leq i\leq M}$ une base ~~orthonormée~~ de $S_n(\mathbb{R})$ orthonormée pour b et $(f_j)_{1\leq j\leq N}$ une base de $T_n(\mathbb{R})$ orthonormée pour $-b$, alors la concaténation des deux bases est une base de $M_n(\mathbb{R})$ (puisque $M_n(\mathbb{R}) = S_n(\mathbb{R}) \oplus T_n(\mathbb{R})$) et la matrice de b dans cette base est $\begin{pmatrix} I_M & 0 \\ 0 & -I_N \end{pmatrix}$ de sorte que la signature de b est $(M,N) = (\dim S_n(\mathbb{R}), \dim T_n(\mathbb{R}))$

On veut A tq $b(A,A)=0$ et $\operatorname{tr}(A)=n$. On écrit $A = S+T$ avec S symétrique et T antisym.
alors $\operatorname{tr}(A) = \operatorname{tr}(S) + \operatorname{tr}(T) = \operatorname{tr}(S)$ (les coef. sur la diagonale de T sont nuls)

$b(A,A) = b(S,S) + b(T,T)$ car $b(S,T) = b(T,S) = 0$

On choisit $S = I$ de sorte que $\operatorname{tr}(S) = b(S,S) = n$. On veut alors T tq $b(T,T) = -n$

Prenons T_0 antisymétrique non nulle (existe dès que $n \geq 2$, par ex $\left(\begin{array}{cc|c} 0 & 1 & \\ -1 & 0 & \\ \hline & & 0 \end{array}\right)$) alors $b(T_0,T_0)<0$

d'après 1.d, $T = \dfrac{\sqrt{n}}{\sqrt{-b(T_0,T_0)}}\, T_0$ convient

1.e On cherche $A = (a_{ij})$ tq $|a_{ij}|$ ne dépend pas de (i,j) et $b(A,A)=0$

Pour $n=1$ A n'existe pas

Pour $n=2$ On propose $A = I + \underbrace{\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}}_{B}$ alors $b(A,A) = \underbrace{b(I,I)}_{\operatorname{tr}(I)} + \underbrace{b(B,B)}_{\operatorname{tr}(B^2) = \operatorname{tr}(-I)}$

Pour $n=3$ Affirmation : pas de solution

Affirmation : solution pour n pair : $A_0 = \begin{pmatrix} 1 & - \\ | & 1 \end{pmatrix} \in S_{n/2}(\mathbb{R}) \rightsquigarrow A = \begin{pmatrix} A_0 & A_0 \\ -A_0 & A_0 \end{pmatrix}$