Feuille 5 ex3-4

samedi 3 décembre 2022 09:43

Intersection de ss esp. affines (ex 3)

$F \subset (E, V)$ $F \neq \emptyset$ $x \in F \rightsquigarrow (F,x) = \{v \in V,\ x+v \in F\} = \{\vec{xy},\ y \in F\} \ni 0_V$

dépend a priori de x

$y \in F$ $(F,y) = \{\vec{yz},\ z \in F\} = \{\vec{xz} - \vec{xy},\ z \in F\}$

$\rightsquigarrow \vec{xy} \in (F,x)$ $= (F,x) - \vec{xy} = \underbrace{T_{-\vec{xy}}}_{\text{translation de vecteur } -\vec{xy}} (F,x)$

(F,x) est un sev de V $\Leftrightarrow$ (F,y) est un sev de V auquel cas $(F,x) = (F,y)$

F est un espace affine de direction (F,x)

Inversement on peut expliciter F ss espace affine $\neq \emptyset$ de E par un pt de F : x

et un ss espace vectoriel de V, disons W

En mots $F = x + W = \{x + \omega,\ \omega \in W\}$

Exemple droite de $\mathbb{R}^n$ passant par un pt A de vecteur directeur $\vec{u} \neq 0 \rightsquigarrow A + \mathrm{Vect}(\vec{u})$

$\{A + \lambda\vec{u},\ \lambda \in \mathbb{R}\}$

Rq On peut aussi donner F comme le ss espace affine engendré par $A_0, \dots, A_k$:

$= A_0 + \mathrm{Vect}(\vec{A_0A_1}, \vec{A_0A_2}, \dots, \vec{A_0A_k})$

$=$ ens des combinaisons barycentriques des A_i

Intersection : $F_1 = x + W_1$ $F_1 \cap F_2$?

$F_2 = y + W_2$

Réponse du cours (?) $F_1 \cap F_2 = \emptyset$ ou $F_1 \cap F_2$ est un ss espace affine de direction $W_1 \cap W_2$

Trouver un pt de $F_1 \cap F_2$

On cherche $\omega \in W_1$ tq $x + \omega \in F_2$ ie $x + \omega = y + \omega'$ avec $\omega' \in W_2$

ie $\underbrace{y - x}_{\vec{xy} \in V} = \omega - \omega'$ avec $\omega \in W_1$ & $\omega' \in W_2$

CNS pour que $F_1 \cap F_2 \neq \emptyset$ a pour l'existence de $\omega \in W_1$ et $\omega' \in W_2$: $\vec{xy} \in \underbrace{W_1 + W_2}$

$= \{\omega + \omega',\ \omega \in W_1,\ \omega' \in W_2\}$

CS : $W_1 + W_2 = V$

Une et une seule solution si $V = W_1 \oplus W_2$ i.e. $\begin{cases} W_1 + W_2 = V \\ W_1 \cap W_2 = \{0\} \end{cases}$

Exp dans le plan $\mathbb{R}^2$ Soient F_1, F_2 deux droites affines $\subset \mathbb{R}^2$ de direction $\vec{F_1}$ et $\vec{F_2}$

(de dim 1)

$\vec{F_1} = \vec{F_2}$ alors $F_1 \,//\, F_2$ confondues ou d'intersection $\emptyset$

$\vec{F_1} \neq \vec{F_2}$ alors $\vec{F_1} \oplus \vec{F_2} = \mathbb{R}^2$ et $F_1 \cap F_2$ est un pt

On a répondu à 4.a

On suppose (F_1, V_1) et (F_2, V_2) transverses i.e. $V_1 \oplus V_2 = V$

id est

$p_{F_1}^{\vec{F_2}}$: identité sur F_1

$F_2 \longrightarrow F_1 \cap F_2$

Soit $O = F_1 \cap F_2$ f affine est déterminée par $f(O)$ et la partie linéaire $\varphi \in \mathrm{End}(V)$

$f(M) = f(O) + \varphi(\vec{OM})$

On veut $f(F_2) = \{O\}$ en particulier $f(O) = O$ (grand O, $\in E$) et $\varphi(\vec{OM}) = 0$ (zéro de V) pour tout $M \in F_2$

i.e. $\varphi|_{V_2} = 0$

On veut $f|_{F_1} = \mathrm{id}_{F_1}$ donc $\varphi|_{V_1} = \mathrm{id}_{V_1}$

Rq Caractérisations des applications affines

$f : E \to E$ est affine $\overset{\text{def}}{\Leftrightarrow}$ $\exists\, O \in E$ et $\varphi \in \mathrm{End}(V)$ tq $\forall M$ $f(M) = f(O) + \varphi(\vec{OM})$

$\Leftrightarrow$ f préserve les barycentres

combinaisons barycentriques

$\Updownarrow$ f préserve l'alignement