

Algèbre et Géométrie

Interrogation courte — le 30 septembre 2022 — 9h-10h et 10h15-11h15

Soit $E \subset \mathbf{R}_{\leq 3}[X]$ l'ensemble des polynômes de degré ≤ 3 s'annulant en 0.

Pour $P \in E$, on pose $\phi_1(P) = P(1)$, $\phi_2(P) = P'(1)$ et $\phi_3(P) = P''(1)$.

1. Montrer que E est un \mathbf{R} -espace vectoriel de base (X, X^2, X^3) .

2. Montrer que $\phi_i \in E^*$ pour $i = 1, 2, 3$.

Supposons que $\{P_1, P_2, P_3\} \subset E$ est une famille de polynômes tels que

$$\phi_i(P_j) = \delta_{ij} \quad \text{pour } 1 \leq i, j \leq 3.$$

3. Montrer que $\{P_1, P_2, P_3\}$ est libre en utilisant la relation précédente.

4. Exhiber une telle famille $\{P_1, P_2, P_3\}$. Est-elle unique?

5. En déduire que (P_1, P_2, P_3) est une base de E et que (ϕ_1, ϕ_2, ϕ_3) est une base de E^* .

6. Montrer que le noyau de ϕ_2 s'identifie au sous-espace vectoriel de E engendré par P_1 et P_3 .

On définit une application $\Phi : E \rightarrow E$ par $\Phi(P) = P(1)X + P'(1)X^2 + P''(1)X^3$.

7. Montrer que Φ est linéaire. Exhiber la matrice $A = M(\Phi)_{(X, X^2, X^3)}$ de Φ dans la base (X, X^2, X^3) .

8. Calculer le produit matriciel AQ où Q est la matrice dont les colonnes sont les polynômes P_1, P_2, P_3 exprimés dans la base (X, X^2, X^3) . Commenter !

On note E_1 l'ensemble des polynômes $P \in E$ vérifiant $P(1 - X) = P(1 + X)$. C'est un sous-espace vectoriel de E . (Pourquoi ?).

9. Montrer que si $P \in E_1$ alors $\tilde{P}(X) = P(1 + X)$ est une somme de monômes de degré pair, d'où $\tilde{P}'(0) = 0$. En déduire que E_1 est contenu dans le noyau de ϕ_2 .

10. Montrer que si $P \in E_1$ alors $P(2) = 0$. En déduire (à l'aide de **6.** et de **9.**) une description explicite de tous les polynômes appartenant à E_1 .

BARÈME INDICATIF: 0.5+0.5+0.5+1.5+1+1+1+1.5+1+1.5 = 10 PTS