

Sauf indication contraire, les affirmations doivent être argumentées

1. *Triangulation du cercle*

On considère le cercle $S^1 = \{z \in \mathbb{C}, |z| = 1\}$.

a. Quels sont les complexes simpliciaux dans \mathbb{C} dont l'espace topologique sous-jacent est homéomorphe au cercle S^1 ? (Répondre brièvement.)

Existe-t-il un complexe simplicial dans \mathbb{C} dont l'espace topologique sous-jacent est égal à S^1 ?

b. On considère le complexe simplicial abstrait K_n d'ensemble de sommets $\{0, \dots, n\}$ formé des simplexes $\{0, 1\}, \{1, 2\}, \dots, \{n-1, n\}, \{n, 0\}$ et de leurs faces. On réalise K_n de façon standard dans $\mathbb{R}^{S_{K_n}} = \mathbb{R}^{\{0, \dots, n\}}$. Pour $\Sigma \subset K_n$ un ensemble de simplexes de K_n on note $K_n(\Sigma)$ le sous-complexe simplicial de K_n formé des éléments de Σ et de leurs faces. $K_n(\Sigma)$ se réalise également dans $\mathbb{R}^{\{0, \dots, n\}}$ de sorte que les espaces topologiques $|K_n|$ et $|K_n(\Sigma)|$ sont des parties compactes de $\mathbb{R}^{\{0, \dots, n\}}$, la première contenant la seconde.

Reconnaissez vous les complexes simpliciaux $K_n(\{i\})$ et $K_n(\{i, i+1\})$ (avec la convention $n+1 = 0$) ?

Soient $0 = t_0 < t_1 < \dots < t_n < t_{n+1} = 1$ des réels. Montrer que des homéomorphismes $\varphi_{n,j} : |K_n(\{j, j+1\})| \rightarrow \{\exp(2i\pi t), t_j \leq t \leq t_{j+1}\}$ qui envoient $|K_n(\{j\})|$ sur $\{\exp(2i\pi t_j)\}$, j décrivant $\{0, \dots, n\}$, induisent pour les n convenables un homéomorphisme $\varphi_n : |K_n| \rightarrow S^1$.

On fixe pour la suite les homéomorphismes $\varphi_n : |K_n| \rightarrow S^1$ correspondant aux choix suivants :

$$(t_j) = \left(\frac{j}{n+1}\right)_{0 \leq j \leq n+1} ,$$

$\varphi_{n,j}$ est la composée de la fonction $t \mapsto \exp(2i\pi t)$ avec un isomorphisme affine $|K_n(\{j, j+1\})| \rightarrow [t_j, t_{j+1}]$ qui envoie $|K_n(\{j\})|$ sur $\{t_j\}$.

c. On note g l'application $S^1 \rightarrow S^1, z \mapsto z^2$.

Soient $m, n \geq 2$ deux entiers. L'application composée $\varphi_n^{-1} \circ \varphi_m : |K_m| \rightarrow |K_n|$ peut elle être de la forme $|f|$ pour f une application simpliciale $K_m \rightarrow K_n$? (Discuter suivant les valeurs de m et n .)

Admet elle une approximation simpliciale relative à K_m et K_n ?

Montrer que l'application $\varphi_2^{-1} \circ g \circ \varphi_5 : |K_5| \rightarrow |K_2|$ est de la forme $|f|$ pour f une application simpliciale $K_5 \rightarrow K_2$.

L'application $\varphi_2^{-1} \circ g \circ \varphi_2 : |K_2| \rightarrow |K_2|$ admet elle une approximation simpliciale relative à K_2 et K_2 ?

d. Montrer que l'application composée $\varphi_n^{-1} \circ \varphi_m$ induit un isomorphisme en homologie $H_*(K_m) \rightarrow H_*(K_n)$.

e. Décrire le complexe de chaînes $C_*(K_n)$ puis les groupes $H_0(K_n), H_1(K_n)$ (avec générateurs...). On pourra commencer par le cas $n = 2$.

f. Décrire les morphismes $C_k(\varphi_2^{-1} \circ g \circ \varphi_5)$ et $H_k(\varphi_2^{-1} \circ g \circ \varphi_5)$ pour $k = 0, 1$.

Peut-on en déduire une description des morphismes $H_k(\varphi_n^{-1} \circ g \circ \varphi_m)$ pour $m, n \geq 2$?

g. L'application g est elle homotope à un homéomorphisme de S^1 dans lui-même ?

2. *Triangulation du cylindre*

On considère le cylindre $S^1 \times [0, 1] \subset \mathbb{C} \times \mathbb{R}$.

a. Proposer un complexe simplicial L_n contenant $K_n \times \{0, 1\} \simeq K_n \sqcup K_n$ comme sous-complexe et un homéomorphisme $\phi_n : |L_n| \rightarrow S^1 \times [0, 1]$ dont la restriction à $|K_n| \times \{0, 1\}$ soit l'application $(x, i) \mapsto (\varphi_n(x), i)$, $|K_n| \times \{0, 1\} \rightarrow S^1 \times [0, 1]$.

b. Montrer que l'application simpliciale $K_n \times \{0\} \rightarrow L_n$ induit un isomorphisme en homologie.

En déduire une description des morphismes $H_k(\phi_2^{-1} \circ h \circ \phi_5)$, $k = 0, 1$, où h est l'application $S^1 \times [0, 1] \rightarrow S^1 \times [0, 1]$, $(z, t) \mapsto (z^2, t)$.

c. L'ensemble S_{L_n} des sommets de L_n contient $S_{K_n \times \{0, 1\}} = S_{K_n} \times \{0, 1\} = \{0, \dots, n\} \times \{0, 1\}$. On définit la relation \sim sur S_{L_n} par $(k, 0) \sim (k, 1)$ pour tout $k \in S_{K_n}$.

L'homéomorphisme $|L_n| \rightarrow S^1 \times [0, 1]$ induit-il un homéomorphisme $|L_n| / \sim \rightarrow (S^1 \times [0, 1]) / (z, 0) \sim (z, 1)$? (La réponse dépend peut-être du choix que vous avez fait pour L_n .)

3. Triangulation du tore

a. On considère le complexe simplicial $L_n \times \{0, 1, 2\} \simeq L_n \sqcup L_n \sqcup L_n$ et on note M_n le complexe quotient $(L_n \times \{0, 1, 2\}) / \sim$ où \sim est la relation sur $S_{L_n \times \{0, 1, 2\}} = S_{L_n} \times \{0, 1, 2\} \supset S_{K_n} \times \{0, 1\} \times \{0, 1, 2\}$ donnée par $(k, 1, 0) \sim (k, 0, 1)$ et $(k, 1, 1) \sim (k, 0, 2)$ pour tout $k \in S_{K_n}$. (Faites un dessin.)

Montrer que l'homéomorphisme $\phi_n : |L_n| \rightarrow S^1 \times [0, 1]$ induit un homéomorphisme $\psi_n : |M_n| \rightarrow S^1 \times [0, 3]$.

Vérifier que ψ_n induit un homéomorphisme

$$\overline{\psi_n} : |M_n| / \sim \rightarrow (S^1 \times [0, 3]) / (z, 0) \sim (z, 3) \quad ,$$

où \sim est la relation sur S_{M_n} donnée par $(k, 0, 0) \sim (k, 1, 2)$ pour tout $k \in S_{K_n}$.

b. Montrer que l'application $(z, t) \mapsto (z^2, t)$, $S^1 \times [0, 3] \rightarrow S^1 \times [0, 3]$ induit une application continue \bar{g} de $(S^1 \times [0, 3]) / (z, 0) \sim (z, 3)$ dans lui-même.

4. La suite exacte de Mayer-Vietoris

a. On note T_n le complexe simplicial M_n / \sim , $T_n^{(01)}$ l'image dans T_n de $L_n \times \{0, 1\}$ et $T_n^{(2)}$ l'image dans T_n de $L_n \times \{2\}$.

A quoi s'identifie l'intersection $T_n^{(01)} \cap T_n^{(2)}$?

b. Montrer qu'un morceau de la suite exacte de Mayer-Vietoris associée à la paire de sous-complexes $(T_n^{(01)}, T_n^{(2)})$ de T_n s'identifie à

$$0 \rightarrow H_2(T_n) \rightarrow H_1(K_n \times \{0, 1\} \times \{2\}) \rightarrow H_1(K_n \times \{1\} \times \{1\}) \oplus H_1(K_n \times \{0\} \times \{2\}) \rightarrow H_1(T_n)$$

c. Calculer la matrice (à coefficients dans l'anneau des endomorphismes de $H_1(K_n)$...) de l'homomorphisme

$$H_1(K_n)^{\{0, 1\} \times \{2\}} \simeq H_1(K_n \times \{0, 1\} \times \{2\}) \rightarrow H_1(K_n \times \{1\} \times \{1\}) \oplus H_1(K_n \times \{0\} \times \{2\}) \simeq H_1(K_n)^{\{1\} \times \{1\} \sqcup \{0\} \times \{2\}}$$

En déduire $H_2(T_n)$.

d. Vérifier que l'homomorphisme $\overline{\psi_2}^{-1} \circ \bar{g} \circ \overline{\psi_5} : |T_5| \rightarrow |T_2|$ est compatible avec les paires de sous-complexes $(T_n^{(01)}, T_n^{(2)})$, $n = 5, 2$.

En déduire que l'homomorphisme

$$H_2(\overline{\psi_2}^{-1} \circ \bar{g} \circ \overline{\psi_5}) : H_2(T_5) \rightarrow H_2(T_2)$$

est compatible avec les morceaux de suite exacte de Mayer-Vietoris mentionnés plus haut pour $n = 5$ et $n = 2$ puis décrire cet homomorphisme.