

M2 Math – Topologie Algébrique

(version du 17 février 2009)¹

7. Triangulation des espaces quotient

Espaces topologiques quotient

Soit \sim une relation d'équivalence sur un ensemble X . On note \sim_{eq} la relation d'équivalence sur X engendré par \sim : c'est la plus petite relation d'équivalence contenant \sim au sens de l'inclusion des graphes. Pour $x, y \in X$ on a $x \sim_{eq} y$ si et seulement si $x = y$ ou s'il existe un entier $k \geq 1$ et des éléments x_0, \dots, x_k de X tels que $x_0 = x$, $x_k = y$ et $x_i \sim x_{i+1}$ ou $x_{i+1} \sim x_i$ pour $0 \leq i \leq k-1$.

On note X/\sim et on appelle ensemble **quotient** de X par \sim l'ensemble des classes d'équivalence de X pour la relation \sim_{eq} . On note π la projection $X \rightarrow X/\sim$.

Propriété universelle : Soit f une application de X dans un ensemble Y . Il existe une application $\bar{f} : X/\sim \rightarrow Y$ telle que $f = \bar{f} \circ \pi$ si et seulement si

$$\forall x, x' \in X, x \sim x' \Rightarrow f(x) = f(x').$$

Un tel \bar{f} est alors unique ; on l'appelle l'**application induite** par f .

Si X est un espace topologique on munit l'ensemble X/\sim de la topologie la plus fine rendant π continue. Ainsi une partie $F \subset X/\sim$ est fermée ssi $\pi^{-1}(F)$ est fermée dans X .

Si f est une application continue de X dans un espace topologique Y induisant une application d'ensembles $\bar{f} : X/\sim \rightarrow Y$, alors \bar{f} est continue.

Rappelons qu'un espace topologique X est dit compact si de tout recouvrement ouvert de X on peut extraire un recouvrement fini. X est dit séparé si pour toute paire d'éléments $x, y \in X$ il existe des ouverts U, V de X d'intersection vide tels que $x \in U$ et $y \in V$. L'image d'un compact par une application continue est compact. Si X est séparé, toute partie compacte de X est fermée dans X . On en déduit le :

Lemme 7.1 Soient X un espace compact, Y un espace séparé et $f : X \rightarrow Y$ une application continue surjective. On définit la relation \sim sur X par $x \sim x' \Leftrightarrow f(x) = f(x')$; alors l'application $X/\sim \rightarrow Y$ induite par f est un homéomorphisme.

Ex. 1) On choisit pour modèle du cercle S^1 l'ensemble des nombres complexes de module 1. L'application $[0, 1] \rightarrow S^1, t \mapsto \exp(2i\pi t)$ induit un homéomorphisme $[0, 1]/\sim \rightarrow S^1$ où \sim est la relation sur $[0, 1]$ donnée par $0 \sim 1$.

2) L'application de $S^1 \times [0, 1]$ dans le tore $S^1 \times S^1, (z, t) \mapsto (z, \exp(2i\pi t))$, induit un homéomorphisme $(S^1 \times [0, 1])/\sim \rightarrow S^1 \times S^1$ où \sim est la relation sur $S^1 \times [0, 1]$ donnée par $(z, 0) \sim (z, 1)$ pour tout $z \in S^1$.

3) Soit $\varphi : S^1 \rightarrow S^1$ l'application $z \mapsto \bar{z}$ (symétrie par rapport à l'axe réel). La bouteille de Klein est le quotient du cylindre $S^1 \times [0, 1]$ par la relation $(z, 0) \sim (\varphi(z), 1)$.

4) Soit G un groupe fini agissant sur un espace topologique X . On définit la relation \sim sur X par $x \sim g.x$ pour tout $x \in X$ et $g \in G$. On note X/G le quotient X/\sim appelé quotient de X par G . L'espace projectif réel de dimension $n, \mathbb{R}P^n$, est le quotient $S^n/(\mathbb{Z}/2)$ où $\mathbb{Z}/2$ agit sur S^n par la symétrie centrale par rapport à 0 (antipodie).

Cas particulier : les sommes amalgamées

Soient X, Y, Z des espaces topologiques et $f : X \rightarrow Y, g : X \rightarrow Z$ des applications continues. On note $Y \cup_X Z$ le quotient de la réunion disjointe $Y \sqcup Z$ par la relation \sim donnée par $f(x) \sim g(x)$ pour tout $x \in X$. L'espace topologique $Y \cup_X Z$ s'appelle la **somme amalgamée** de Y et de Z sous X ou encore la somme amalgamée du diagramme $Y \leftarrow X \rightarrow Z$. Notons (p, q) la projection $Y \sqcup Z \rightarrow Y \cup_X Z$ ($p : Y \rightarrow Y \cup_X Z, q : Z \rightarrow Y \cup_X Z$). L'espace topologique $Y \cup_X Z$ muni des applications p, q vérifie la propriété universelle suivante :

¹F.X. Dehon, dehon@unice.fr

Soient T un espace topologique et $p' : Y \rightarrow T$, $q' : Z \rightarrow T$ des applications continues telles que $p' \circ f = q' \circ g$ alors il existe une application continue $h : Y \cup_X Z \rightarrow T$ et une seule vérifiant $p' = h \circ p$ et $q' = h \circ q$.

On en déduit :

Soient $Y \leftarrow X \rightarrow Z$ et $Y' \leftarrow X' \rightarrow Z'$ des diagrammes d'espaces topologiques et $X \rightarrow X'$, $Y \rightarrow Y'$, $Z \rightarrow Z'$ des homéomorphismes tels que le diagramme

$$\begin{array}{ccccc} Y & \leftarrow & X & \rightarrow & Z \\ \downarrow & & \downarrow & & \downarrow \\ Y' & \leftarrow & X' & \rightarrow & Z' \end{array}$$

commute ; alors l'application induite $Y \cup_X Z \rightarrow Y' \cup_{X'} Z'$ est un homéomorphisme.

Complexes simpliciaux quotient

Soient K un complexe simplicial et \sim une relation sur S_K (l'ensemble des sommets de K). On note π la projection $S_K \rightarrow S_K/\sim$. L'ensemble formé par les parties $\pi(S_\sigma)$ de S_K/\sim , σ décrivant K , est un complexe simplicial abstrait. En effet $\pi(S_\sigma)$ est un ensemble fini non vide et pour toute partie non vide A de $\pi(S_\sigma)$ il existe une face τ de σ tel que $S_\tau = \pi^{-1}(A) \cap S_\sigma$ de sorte que $\pi(S_\tau) = A$.

Rq. On n'a pas en général $\pi(S_\sigma) \cap \pi(S_\tau) = \pi(S_{\sigma \cap \tau})$.

Déf. On appelle $\{\pi(S_\sigma), \sigma \in K\}$ le **complexe simplicial quotient** de K par la relation \sim et on le note K/\sim .

L'application $\pi : S_K \rightarrow S_{K/\sim} = (S_K)/\sim$ est un morphisme de complexes simpliciaux et vérifie la propriété universelle suivante :

Pour tout application simpliciale f de K dans un complexe simplicial L il existe une application simpliciale $\bar{f} : K/\sim \rightarrow L$ telle que $f = \bar{f} \circ \pi$ si et seulement si $\forall s, s' \in S_K, s \sim s' \Rightarrow f(s) = f(s')$. Un tel \bar{f} est alors unique ; on l'appelle l'application simpliciale induite par f .

La "réalisation" de π , $|\pi| : |K| \rightarrow |K/\sim|$ est continue et surjective ; elle induit un homéomorphisme $|K|/\sim \rightarrow |K/\sim|$, où \sim est la relation sur $|K|$ donnée par $x \sim y \Leftrightarrow |\pi|(x) = |\pi|(y)$, en vertu du lemme 7.1

Ex. Soit \sim la relation sur $S_{\Delta[2]}$ donnée par $0 \sim 2$, alors $\Delta[2]/\sim$ est le complexe simplicial abstrait $\{\{\bar{0}, \bar{1}\}, \{\bar{0}\}, \{\bar{1}\}\} \simeq \Delta[1]$, où on a noté $\bar{0}$ la classe d'équivalence du sommet 0 dans $S_{\Delta[2]}/\sim$, etc.

Cas particulier : sommes amalgamées de complexes simpliciaux

Soient K, L, M des complexes simpliciaux et $f : K \rightarrow L$, $g : K \rightarrow M$ des applications simpliciales. On note $L \cup_K M$ le complexe simplicial quotient $(L \sqcup M)/\sim$ où \sim est la relation sur $S_{L \sqcup M} = S_L \sqcup S_M$ donnée par $f(s) \sim g(s)$ pour tout $s \in S_K$, et on l'appelle la **somme amalgamée** de L et de M sous K ou encore la somme amalgamée du diagramme $L \leftarrow K \rightarrow M$.

Notons (p, q) la projection $L \sqcup M \rightarrow L \cup_K M$ ($p : L \rightarrow L \cup_K M$, $q : M \rightarrow L \cup_K M$). Le complexe simplicial $L \cup_K M$ muni des deux applications simpliciales p, q vérifie la propriété universelle suivante :

Soit N un complexe simplicial et $p' : L \rightarrow N$, $q' : M \rightarrow N$ des applications simpliciales telles que $p' \circ f = q' \circ g$ alors il existe une et une seule application simpliciale $h : L \cup_K M \rightarrow N$ vérifiant $p' = h \circ p$ et $q' = h \circ q$.

Le diagramme

$$\begin{array}{ccc} K & \xrightarrow{g} & M \\ \downarrow f & & \downarrow q \\ L & \xrightarrow{p} & L \cup_K M \end{array}$$

induit un diagramme commutatif d'espaces topologiques et applications continues

$$\begin{array}{ccc} |K| & \xrightarrow{|g|} & |M| \\ \downarrow |f| & & \downarrow |q| \\ |L| & \xrightarrow{|p|} & |L \cup_K M| \end{array}$$

donc une application continue $h : |L| \cup_{|K|} |M| \rightarrow |L \cup_K M|$. Si L et M sont finis, il suffit à cette application d'être bijective pour qu'elle soit un homéomorphisme en vertu du lemme 7.1 puisque $|L| \cup_{|K|} |M|$ est le quotient

d'un espace compact donc est compact et puisque $|L \cup_K M|$ est séparé. On sait déjà que $S_L \sqcup S_M \rightarrow S_{L \cup_K M}$ est surjective donc $|L| \sqcup |M| \rightarrow |L \cup_K M|$ est surjective donc également h .

Notons pour $n \geq 0$ et K un complexe simplicial, $K_{(n)}$ le sous-complexe simplicial de K formé des simplexes de dimension inférieure ou égale à n . Une application simpliciale $f : K \rightarrow L$ se restreint en une application simpliciale $K_{(n)} \rightarrow L_{(n)}$, laquelle induit une application d'ensembles $K_{(n)} \rightarrow L_{(n)}$, $\sigma \mapsto f(\sigma)$

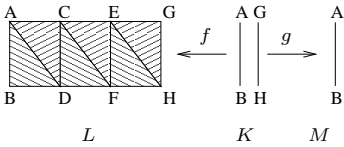
Lemme 7.2 Les deux conditions suivantes sont équivalentes :

- (i) L'application $|L| \cup_{|K|} |M| \rightarrow |L \cup_K M|$ est un homéomorphisme.
- (ii) Pour chaque entier n l'application $L_{(n)} \cup_{K_{(n)}} M_{(n)} \rightarrow (L \cup_K M)_{(n)}$ est une bijection d'ensembles.

Une condition suffisante (avec les notations de la section 5) : $f : K \rightarrow L$ est injective (*i.e.* $f : S_K \rightarrow S_L$ est injective) et saturée (*i.e.* pour toute partie A de S_K , si $f(A) = S_\tau$ pour un simplexe τ de L alors $A = S_\sigma$ pour un simplexe σ de K) et pour tout sommet s de L la restriction de g à $f^{-1}(\bigcup_{\sigma \in \text{St}(s)} S_\sigma)$ est injective (on dira que g vérifie la condition (Inj^*) relativement à f).

Ex. K est formé du 1-simplexe $\{0, 2\}$ et de ses faces ; $L = \partial\Delta[2]$; $f : K \rightarrow L$ est l'inclusion ; g est l'application $K \rightarrow \text{pt}$. Alors $L \cup_K \text{pt}$ est isomorphe à $\Delta[1]$ alors que $|L| \cup_{|K|} |\text{pt}| = ([0, 1] \cup [1, 2])/0 \sim 2$ est homéomorphe au cercle S^1 . f est injective et saturée mais g ne vérifie pas la condition (Inj^*) .

Ex. 1) La triangulation du cylindre et du ruban de Moebius : L est la triangulation d'un rectangle plein $ABHG$ du plan donnée ci-dessous (figure) ; K est formé de la réunion disjointe des 1-simplexes AB et GH et de leurs faces ; M est formé du 1-simplexe AB et de ses faces. f est l'inclusion de K dans L (f est injective et saturée).

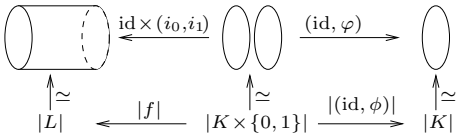


Prenons pour g l'application simpliciale $A, G \mapsto A$; $B, H \mapsto B$. Alors g vérifie la condition (Inj^*) relativement à f donc $|L \cup_K M|$ est homéomorphe à $|L| \cup_{|K|} |M| \simeq S^1 \times [0, 1]$ (le cylindre).

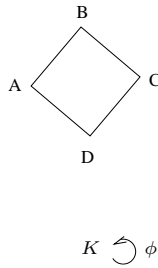
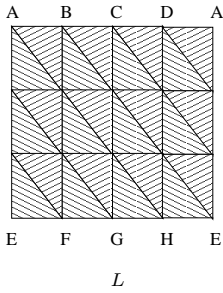
Prenons maintenant pour g l'application simpliciale $A, H \mapsto A$; $B, G \mapsto B$. g vérifie toujours la condition (Inj^*) relativement à f donc $|L \cup_K M|$ est homéomorphe à $|L| \cup_{|K|} |M|$ lequel est un ruban de Moebius.

2) La bouteille de Klein : On choisit une triangulation à homéomorphisme près L du cylindre $S^1 \times [0, 1]$ et une triangulation K de S^1 avec une application simpliciale injective $f : K \times \{0, 1\} \rightarrow L$ telle que la composée $|K| \times \{0, 1\} \simeq |K| \times \{0, 1\} \xrightarrow{|f|} |L| \xrightarrow{\simeq} S^1 \times [0, 1]$ corresponde via l'homéomorphisme $|K| \rightarrow S^1$ à l'inclusion $S^1 \times \{0, 1\} \rightarrow S^1 \times [0, 1]$. (Cf la triangulation de $|K| \times [0, 1]$ dans la section 6).

On choisit K de sorte que la symétrie par rapport à l'axe réel $\varphi : S^1 \rightarrow S^1$ (Cf l'ex 3 du paragraphe sur les espaces topologiques quotient) corresponde via l'homéomorphisme $|K| \rightarrow S^1$ à une application simpliciale $\phi : K \rightarrow K$. Soient i_0 et i_1 les inclusions $K \rightarrow K \times \{0, 1\}$. On définit $g : K \times \{0, 1\} \rightarrow K$ par $g \circ i_0 = \text{id}_K$ et $g \circ i_1 = \phi$.



On choisit L (contenant les deux copies de K) de sorte que f soit saturée et g vérifie la relation (Inj^*) relativement à f . Un choix possible pour K est le bord du carré $ABCD$ avec $\phi : A \mapsto A, C \mapsto C, B \mapsto D, D \mapsto B$ (figure ci-dessous) et pour L la triangulation du cylindre proposée ci-dessous



Somme amalgamée de complexes simpliciaux et suite exacte de Mayer-Vietoris

Prop. 7.3 Soient K, L, M des complexes simpliciaux et $f : K \rightarrow L, g : K \rightarrow M$ des applications simpliciales. On suppose que f est injective et que la condition (ii) du lemme 7.2 est satisfaite, alors la suite de complexes de groupes abéliens

$$0 \rightarrow C_*(K) \xrightarrow{(f_*, g_*)} C_*(L) \oplus C_*(M) \xrightarrow{(p_*, -q_*)} C_*(L \cup_K M) \rightarrow 0$$

est exacte, où (p, q) est la projection $L \sqcup M \rightarrow L \cup_K M$.

Sous les hypothèses de la proposition on en déduit une suite exacte longue en homologie (Cf section 4) qu'on appelle la **suite exacte de Mayer-Vietoris** du diagramme $L \leftarrow K \rightarrow M$.

Ex. Calculer l'homologie de la bouteille de Klein.

Cas particulier : quotient d'un complexe simplicial par l'action d'un groupe

Soient G un groupe fini et K un complexe simplicial. Une action simpliciale de G sur K est la donnée d'un homomorphisme de groupes ϕ de G sur le groupe des isomorphismes (simpliciaux) de K . On a donc pour tout $g \in G$ une application simpliciale $\phi(g) : K \rightarrow K$ avec les relations $\phi(1) = \text{id}_K$ et $\phi(g.g') = \phi(g) \circ \phi(g')$. L'application $g \mapsto |\phi(g)|$ est une action de G sur l'espace topologique $|K|$.

On note K/G le quotient de K pour la relation \sim sur S_K donnée par $s \sim \phi(g)(s)$ pour tout $s \in S_K$ et tout $g \in G$. La projection $K \rightarrow K/G$ induit une application continue surjective $|K| \rightarrow |K/G|$ invariante par l'action de G , donc une application continue $|K|/G \rightarrow |K/G|$. Comme pour les sommes amalgamées, si K est fini, il suffit à cette application d'être bijective pour être un homéomorphisme. (On sait déjà qu'elle est surjective.)

Lemme 7.4 Les deux conditions suivantes sont équivalentes :

- (i) L'application $|K|/G \rightarrow |K/G|$ est un homéomorphisme.
- (ii) Pour chaque entier n l'application $K_{(n)}/G \rightarrow (K/G)_{(n)}$ est une bijection d'ensembles.

Une condition suffisante : Pour tout sommet $s \in S_K$ et tout $g \in G, \text{St}(s) \cap \text{St}(\phi(g)(s)) = \emptyset$.

Ex. Triangulation du plan projectif réel $\mathbb{R}P^2 = S^2/(\mathbb{Z}/2)$:

- 1) On choisit une triangulation L de la sphère S^2 avec un automorphisme simplicial $\phi : L \rightarrow L$ dont la réalisation $|\phi|$ s'identifie à l'antipodie $S^2 \rightarrow S^2$ (en particulier $\phi \circ \phi = \text{id}_L$) et vérifiant la condition suffisante ci-dessus. Pour cela on peut décrire la sphère S^2 comme la réunion de deux hémisphères collés le long de l'équateur S^1 .
- 2) $\mathbb{R}P^2$ est homéomorphe à la réunion d'un disque D^2 et du ruban de Moebius collés le long de leur bord S^1 .
- 3) $\mathbb{R}P^2$ est homéomorphe à la somme amalgamée $D^2 \xleftarrow{f} S^1 \xrightarrow{\pi} S^1/(\mathbb{Z}/2) \simeq S^1$ où f est l'inclusion de S^1 comme bord du disque et où π est la projection de S^1 sur son quotient par l'action par antipodie de $\mathbb{Z}/2$.

Construire une triangulation suivant chaque programme (1) (2) et (3).