

M2 Math – Topologie Algébrique

(version du 18 février 2009)

6. L'invariance par homotopie

On note I l'intervalle $[0, 1]$ de \mathbb{R} . I est un simplexe de dimension 1 dans \mathbb{R} de sommets 0 et 1. L'ensemble formé de I et de ses faces $\{0\}$ et $\{1\}$ est un complexe simplicial dans \mathbb{R} dont l'espace topologique sous-jacent est I . On le note \mathcal{I} .

On note i_0 et i_1 les inclusions simpliciales $\{\{0\}\} \rightarrow \mathcal{I}$ et $\{\{1\}\} \rightarrow \mathcal{I}$. Leurs réalisations $|i_0|$ et $|i_1|$ sont les inclusions $\{0\} \rightarrow I$ et $\{1\} \rightarrow I$ qu'on notera encore (abusivement) i_0 et i_1 .

Déf. Soient X, Y des espaces topologiques et $f, g : X \rightarrow Y$ des applications continues. On dit que f est homotope à g s'il existe une application continue $h : X \times I \rightarrow Y$ telle que $h \circ i_0 = f$ et $h \circ i_1 = g$.

Ex. Montrer que la relation d'homotopie est une relation d'équivalence sur l'ensemble des applications continues $X \rightarrow Y$.

Théorème 6.1 Soient K, L des complexes simpliciaux et $f, g : |K| \rightarrow |L|$ des applications continues. Si f est homotope à g alors $H_*(f) = H_*(g) : H_*(K) \rightarrow H_*(L)$.

Le théorème est conséquence de la proposition qui suit :

On fixe un espace vectoriel euclidien E . Pour X une partie de E on appelle triangulation de X dans E un complexe simplicial K dans E tel que $|K| = X$. (Un tel K n'existe pas forcément).

Soit K un complexe simplicial fini dans un espace vectoriel euclidien E (si K est abstrait, on le remplace par sa réalisation \overline{K} dans $E = \mathbb{R}^{S_K}$). Pour chaque simplexe σ de K on note (σ, i) , $i = 0, 1$, la partie $\sigma \times \{i\}$ de $E \times \mathbb{R}$. L'ensemble de ces parties, noté $K \times \{0, 1\}$ est un complexe simplicial dans $E \times \mathbb{R}$ réunion de deux copies de K . L'espace topologique sous-jacent à $K \times \{0, 1\}$ est $|K| \times \{0, 1\} \subset E \times \mathbb{R}$.

Prop. 6.2 Soit K un complexe simplicial fini dans un espace euclidien E . Il existe un complexe simplicial fini Cyl_K dans $E \times \mathbb{R}$ et une application simpliciale $(j_0, j_1) : K \times \{0, 1\} \rightarrow Cyl_K$ tels que

- (1) Cyl_K est une triangulation de $|K| \times I$ dans $E \times \mathbb{R}$ et $|(j_0, j_1)| : |K \times \{0, 1\}| \rightarrow |Cyl_K|$ est l'application $\text{id} \times (i_0, i_1) : |K| \times \{0, 1\} \rightarrow |K| \times I$
- (2) L'application continue $\text{pr}_1 : |Cyl_K| = |K| \times I \rightarrow |K|$, $(x, t) \mapsto x$ induit un isomorphisme en homologie.

Démonstration. On construit pour chaque $\sigma \in K$ un complexe simplicial Cyl_σ dans $E \times \mathbb{R}$ vérifiant les propriétés (1) et (2) par récurrence sur la dimension de σ .

Si σ est réduit à un point $A \in E$ on pose $Cyl_\sigma = \{\{A\} \times \tau, \tau \in \mathcal{I}\}$ dont l'espace topologique sous-jacent est $\{A\} \times I = |\sigma| \times I$.

Pour σ quelconque, si Cyl_τ a été construit pour toute face stricte τ de σ on note ∂Cyl_σ le complexe simplicial dans $E \times \mathbb{R}$ formé des faces de $\sigma \times \{i\}$, $i = 0, 1$, (y compris $\sigma \times \{i\}$) et des simplexes de Cyl_τ pour τ face stricte de σ . On note $\hat{\sigma}$ l'isobarycentre dans E des sommets de σ et on définit Cyl_σ comme l'ensemble des simplexes de $E \times \mathbb{R}$ de sommets $\{(\hat{\sigma}, \frac{1}{2}), A_0, \dots, A_k\}$ et de leurs faces, où $\{A_0, \dots, A_k\}$ décrit les ensembles de sommets S_τ , $\tau \in \partial Cyl_\sigma$.

On vérifie que Cyl_σ est un complexe simplicial dans $E \times \mathbb{R}$, qu'on a $|Cyl_\sigma| = |\sigma| \times I$ et $Cyl_\sigma \cap Cyl_\tau = Cyl_{\sigma \cap \tau}$ pour toute paire de simplexe σ, τ de K , de sorte que la réunion $Cyl_K := \bigcup_{\sigma \in K} Cyl_\sigma$ est un complexe simplicial dans $E \times \mathbb{R}$. On vérifie d'autre part que le complexe simplicial formé du seul sommet $(\hat{\sigma}, \frac{1}{2})$ est un retract par déformation contiguë de Cyl_σ donc l'application $Cyl_\sigma \rightarrow \text{pt}$ induit un isomorphisme en homologie.

On note j_i les inclusions $K \times \{i\} \rightarrow Cyl_K$, $i = 0, 1$. Le théorème des modèles acycliques (ou la suite exacte de Mayer-Vietoris) permet de démontrer le

Lemme 6.3 L'inclusion $j_0 : K \times \{0\} \rightarrow Cyl_K$ induit un isomorphisme en homologie.

Comme la composée $\text{pr}_1 \circ |j_0| : |K| \rightarrow |K|$ est l'identité, l'application continue pr_1 induit également un isomorphisme en homologie.

□

Démonstration du théorème. On a $H_*(\text{pr}_1 \circ |j_0|) = H_*(\text{pr}_1 \circ |j_1|) = H_*(\text{id}_K)$ donc $H_*(j_0) = H_*(j_1)$ donc $H_*(h \circ |j_0|) = H_*(h \circ |j_1|)$. □

Équivalences d'homotopie et déformations

Déf. Soient $f : X \rightarrow Y$ une application continue entre espaces topologiques. On dit que f est une **équivalence d'homotopie** s'il existe une application continue $g : Y \rightarrow X$ telle que $g \circ f$ soit homotope à id_X et $f \circ g$ soit homotope à id_Y .

Corolaire 6.4 (du théorème). Soient K, L des complexes simpliciaux et $f : |K| \rightarrow |L|$ une application continue qui est une équivalence d'homotopie ; alors $H_*(f) : H_*(K) \rightarrow H_*(L)$ est un isomorphisme.

Démonstration. Soit $g : |L| \rightarrow |K|$ telle que $g \circ f$ soit homotope à $\text{id}_{|K|}$ et $f \circ g$ soit homotope à $\text{id}_{|L|}$. D'après le théorème on a $H_*(g \circ f) = H_*(\text{id}_{|K|})$ et $H_*(f \circ g) = H_*(\text{id}_{|L|})$. Or $H_*(\text{id}_{|K|}) = \text{id}_{H_*(K)}$ et $H_*(\text{id}_{|L|}) = \text{id}_{H_*(L)}$. On en conclut que $H_*(f)$ est un isomorphisme d'inverse $H_*(g)$. □

Cas particulier :

Déf. Soient X un espace topologique et A une partie de X . On dit que A est un **rétract par déformation continue** de X s'il existe une application continue $g : X \rightarrow A$ telle que la composée $A \hookrightarrow X \xrightarrow{g} A$ est l'identité de A et telle que la composée $X \xrightarrow{g} A \hookrightarrow X$ est homotope à id_X .

Le corollaire dit en particulier que si L est un complexe simplicial dans un espace vectoriel euclidien E et si K est un sous-complexe de L dans E tel que $|K|$ soit un rétract par déformation continue de $|L|$ alors l'inclusion $K \rightarrow L$ induit un isomorphisme en homologie.

Ex. On reprend l'une des triangulations du cylindre donnée en section 3 (figure ci-dessous) qu'on peut réaliser dans \mathbb{R}^3 . Alors $|K|$ est un rétract par déformation continue de $|L|$ donc l'inclusion $i : K \rightarrow L$ induit un isomorphisme en homologie donc également la rétraction r puisque $H_*(r) \circ H_*(i) = H_*(\text{id}_K) = \text{id}_{H_*(K)}$.

