

M2 Math – Topologie Algébrique

(version du 7 février 2009)

5. Approximation simpliciale

Soit K un complexe simplicial fini abstrait ou dans un evn E . Si K est abstrait on pose $E = \mathbb{R}^{S_K}$ muni de la structure euclidienne canonique. L'espace topologique sous-jacent à K , noté $|K|$, est la réunion dans E des enveloppes convexes des ensembles de sommets S_σ , σ décrivant K .

Etoile d'un sommet

Si σ est un simplexe de K on note $|\sigma|$ l'espace topologique sous-jacent à σ (l'enveloppe convexe de S_σ dans E) et $|\overset{\circ}{\sigma}|$ (l'intérieur de σ) les éléments de $|\overset{\circ}{\sigma}|$ dont les coordonnées barycentriques par rapport aux sommets de σ sont strictement positives. (La partie $|\overset{\circ}{\sigma}|$ de $|K|$ n'est ouverte pour la topologie de $|K|$ que si σ n'est pas une face stricte d'un simplexe de K .)

Lemme 5.1 Soit x un élément de $|K|$ alors il existe un unique simplexe σ de K tel que $x \in |\overset{\circ}{\sigma}|$.

Déf. Pour $A \in S_K$ on note $\text{St}(A)$ l'ensemble $\{\sigma \in K, A \in S_\sigma\}$ et on l'appelle l'étoile de A .

On note $|\overset{\circ}{\text{St}(A)}|$ la réunion des $|\overset{\circ}{\sigma}|$, σ décrivant $\text{St}(A)$, qu'on appelle l'intérieur de l'étoile de A .

Lemme 5.2 1) $|\overset{\circ}{\text{St}(A)}|$ est une partie ouverte de $|K|$ contenant A .

2) La famille $(|\overset{\circ}{\text{St}(A)}|)_{A \in S_K}$ est un recouvrement ouvert (fini) de $|K|$.

Démonstration. $|\overset{\circ}{\text{St}(A)}|$ est le complémentaire dans $|K|$ de la réunion (finie) des simplexes $|\sigma|$ ne contenant pas A . Or un simplexe dans E est fermé dans E donc fermé dans $|K|$, donc $|\overset{\circ}{\text{St}(A)}|$ est ouvert. Soit x un élément de $|K|$. D'après le lemme 5.1 il existe un simplexe σ de K tel que $x \in |\overset{\circ}{\sigma}|$. Soit A un sommet de σ . On a $\sigma \in \text{St}(A)$ donc $|\overset{\circ}{\sigma}| \subset |\overset{\circ}{\text{St}(A)}|$ donc $x \in |\overset{\circ}{\text{St}(A)}|$. \square

Approximation simpliciale – 1er pas

Soient K, L des complexes simpliciaux et $g : |K| \rightarrow |L|$ une application (d'ensembles). On dit que g vérifie la condition (*) relativement à K et L si

$$(*) \quad \forall A \in S_K, \exists B \in S_L \text{ tel que } g(|\overset{\circ}{\text{St}(A)}|) \subset |\overset{\circ}{\text{St}(B)}| .$$

Ex. Soit $f : K \rightarrow L$ une application simpliciale alors $f(\text{St}(A)) \subset \text{St}(f(A))$ et pour tout simplexe $\sigma \in K$, $|f|(|\overset{\circ}{\sigma}|) = |f(\overset{\circ}{\sigma})|$. On en déduit que $|f|$ vérifie la condition (*).

Prop. 5.3 Soit $g : |K| \rightarrow |L|$ une application.

(a) Soit f une application $S_K \rightarrow S_L$ vérifiant

$$(**) \quad \forall A \in S_K, g(|\overset{\circ}{\text{St}(A)}|) \subset |\overset{\circ}{\text{St}(f(A))}| .$$

Alors f est une application simpliciale $K \rightarrow L$.

(b) Soient $f, f' : K \rightarrow L$ deux applications simpliciales vérifiant la condition (**) ci-dessus ; alors f et f' sont contiguës.

Démonstration. (a) Soit $\sigma \in K$ et choisissons $x \in |\overset{\circ}{\sigma}|$ (on peut prendre pour x l'isobarycentre des sommets de σ dans E). D'après le lemme 5.1 il existe un unique simplexe $\tau \in L$ tel que $g(x) \in |\overset{\circ}{\tau}|$. Pour tout sommet A de σ on a $x \in |\text{St}(A)|$ donc $g(x) \in |\text{St}(f(A))|$ donc il existe $\tau' \in \text{St}(f(A))$ tel que $g(x) \in |\overset{\circ}{\tau}'|$. Par unicité de τ on a $\tau = \tau'$ en particulier $f(A)$ est un sommet de τ . On en déduit $f(S_\sigma) \subset S_\tau$ donc f est une application simpliciale. Si f' est une application $S_K \rightarrow S_L$ vérifiant également (***) alors $f'(S_\sigma) \subset S_\tau$ donc $f(S_\sigma) \cup f'(S_\sigma) \subset S_\tau$ donc f et f' sont contiguës. \square

Déf. Soient K, L des complexes simpliciaux et $g : |K| \rightarrow |L|$ une application. Une application simpliciale $f : K \rightarrow L$ vérifiant (***) s'appelle une **approximation simpliciale** de g relative à K et L .

Rq. 1) $g : |K| \rightarrow |L|$ étant fixé, l'existence de $f : S_K \rightarrow S_L$ vérifiant la condition (***) équivaut à la condition (*) sur g relativement à K et L .

2) Si $f : K \rightarrow L$ est une application simpliciale alors f est la seule approximation simpliciale de $|f|$ relative à K et L . En particulier si f' est une application simpliciale contiguë à f mais distinct de f alors f' n'est pas une approximation simpliciale de $|f|$ relative à K et L .

Prop. 5.4 Soient K, L, M des complexes simpliciaux, $g : |K| \rightarrow |L|$ une application admettant une approximation simpliciale $f : K \rightarrow L$ et $g' : |L| \rightarrow |M|$ une application admettant une approximation simpliciale $f' : L \rightarrow M$. Alors la composée $f' \circ f : K \rightarrow M$ est une approximation simpliciale de $g' \circ g$.

On fixe maintenant l'espace vectoriel euclidien E dans lequel K se réalise ou est réalisé (suivant que K est donné comme complexe simplicial abstrait ou dans E). Pour P une partie bornée de E on note $\text{diam}(P)$ et on appelle **diamètre** de P le réel $\sup_{x, y \in P} \|y - x\|$.

La proposition qui suit donne une condition suffisante pour qu'une application $g : |K| \rightarrow |L|$ admette une approximation simpliciale.

Prop. 5.5 Soient K un complexe simplicial fini dans un evn E , L un complexe simplicial et $g : |K| \rightarrow |L|$ une application continue. Il existe un réel $\epsilon > 0$ (dépendant de $|K|$, L et g mais pas de la triangulation de $|K|$ dans E) tel que si tous les simplexes de K sont de diamètre inférieur à ϵ alors g admet une approximation simpliciale $K \rightarrow L$.

Démonstration. Puisque K est fini, l'espace topologique sous-jacent à K est une partie compacte de E . Or on a le :

Lemme 5.6 Soit $(U_\alpha)_\alpha$ un recouvrement ouvert d'une partie compacte C de E ; alors il existe un réel $\epsilon > 0$ tel que toute partie P de C de diamètre inférieur à ϵ soit dans l'un des U_α .

On applique le lemme à la famille $(g^{-1}(|\overset{\circ}{\text{St}}(B)|))_{B \in S_L}$ qui est un recouvrement ouvert de $|K|$ par le lemme 5.2 et parce que g est continue. Le réel ϵ obtenu dépend de L et de g .

Soient A un sommet de K et x, y deux éléments de $|\overset{\circ}{\text{St}}(A)|$. Soit σ , respectivement τ le simplexe de K tel que $x \in |\overset{\circ}{\sigma}|$, respectivement $y \in |\overset{\circ}{\tau}|$. A est un sommet de σ et de τ donc

$$\|y - x\| \leq \|y - A\| + \|A - x\| \leq \text{diam}(\tau) + \text{diam}(\sigma) .$$

On obtient

$$\text{diam}(|\overset{\circ}{\text{St}}(A)|) \leq 2 \sup_{\sigma \in \text{St}(A)} \text{diam}(\sigma) .$$

Supposons que les simplexes de K sont tous de diamètre inférieur à $\frac{\epsilon}{2}$; alors g vérifie la condition (*) donc admet une approximation simpliciale relativement à K et L .

\square

Subdivision d'un complexe simplicial

On fixe toujours l'espace vectoriel euclidien E dans lequel se réalise ou est réalisé K .

Déf. On appelle **subdivision de K dans E** un complexe simplicial K' dans E vérifiant les deux conditions suivantes :

$$\begin{cases} \forall \sigma' \in K', \exists \sigma \in K, |\sigma'| \subset |\sigma| \\ \forall \sigma \in K, \bigcup_{\sigma' \in K', |\sigma'| \subset |\sigma|} |\sigma'| = |\sigma| \end{cases}$$

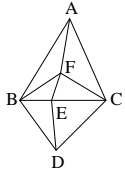
Rq. Sauf si $K = K'$, K n'est pas un sous-complexe simplicial de K' de même que K' n'est pas un sous-complexe simplicial de K .

Pour $\sigma \in K$ on note $K(\sigma)$ le sous-complexe simplicial de K formé de σ et de ses faces, et $K'(\sigma)$ le sous-complexe simplicial de K' formé des simplexes $\sigma' \in K'$ tels que $|\sigma'| \subset |\sigma|$. On observe que $K(\sigma)$ est isomorphe à $\Delta[\dim(\sigma)]$, que $K'(\sigma)$ est une subdivision de $K(\sigma)$ et que K' est la réunion des $K'(\sigma)$, σ décrivant K .

Inversement supposons donnée pour chaque simplexe σ de K une subdivision K'_σ de $K(\sigma)$ vérifiant : pour tout simplexe σ de K et toute face τ de σ on a $K'_\tau = K'_\sigma(\tau)$. Alors la réunion $\bigcup_{\sigma \in K} K'_\sigma$ est une subdivision de K .

Prop. 5.7 Soit K, K' des complexes simpliciaux dans un evn E tels que K' est une subdivision de K ; alors $|K'| = |K|$ et l'application identité $|K'| \rightarrow |K|$ admet une approximation simpliciale $i : K' \rightarrow K$ vérifiant $i(K'(\sigma)) \subset K(\sigma)$ pour tout simplexe σ de K .

Ex. K est le complexe simpliciale dans le plan euclidien formé des triangles pleins ABC, BCD et de leurs faces ; K' est le complexe simplicial formé des triangles pleins $ABF, BEF, CEF, ACF, BDE, CDE$ et de leurs faces (figure ci-dessous). Exhiber une approximation simpliciale de l'identité $|K'| \rightarrow |K|$ relativement à K' et K .



On construit maintenant une subdivision particulière de K dans E , la subdivision barycentrique :

On définit la relation stricte entre simplexes de K suivante : $\sigma \prec \tau$ si σ est une face de τ et $\dim(\sigma) < \dim(\tau)$. Pour σ un simplexe de K on note $\hat{\sigma}$ l'isobarycentre dans E des sommets de σ .

On note $\text{sb}(K)$ l'ensemble formé des enveloppes convexes dans E des ensembles de points $\{\hat{\sigma}_0, \dots, \hat{\sigma}_n\}$ avec $n \geq 0$ et $\sigma_0 \prec \dots \prec \sigma_n$ suite strictement croissante de simplexes de K .

Prop. 5.8 (a) $\text{sb}(K)$ est une subdivision de K dans E et pour tout simplexe σ de K on a $\text{sb}(K(\sigma)) = \text{sb}(K)(\sigma)$.

(b) Pour tout simplexe σ de K et tout simplexe σ' de $\text{sb}(K(\sigma))$ on a $\text{diam}(\sigma') \leq \frac{\dim(\sigma)}{1+\dim(\sigma)} \text{diam}(\sigma)$.

(c) Pour tout simplexe σ de K le sous-complexe simplicial de $\text{sb}(K(\sigma))$ formé du seul sommet $\hat{\sigma}$ est un retract par déformation contiguë de $\text{sb}(K(\sigma))$.

Déf. On appelle $\text{sb}(K)$ la **subdivision barycentrique** de K dans E .

Le point (b) admet pour corollaire immédiat :

Corolaire 5.9 Soit K un complexe simplicial fini d'un evn E et $\epsilon > 0$ un réel ; alors il existe un entier n tel que la subdivision barycentrique itérée n -fois $\text{sb}^{\circ n}(K)$ de K dans E ait tous ses simplexes de diamètre inférieur à ϵ .

Approximation simpliciale – 2ème pas

Théorème 5.10 Soit K un complexe simplicial fini dans un evn E , L un complexe simplicial et $g : |K| \rightarrow |L|$ une application continue ; alors :

- (a) Il existe une subdivision K' de K dans E et une application simpliciale $f : K' \rightarrow K$ qui est une approximation simpliciale de $g : |K'| = |K| \rightarrow |L|$.

- (b) Soit $i : K' \rightarrow K$ une approximation simpliciale de l'application identité $|K'| \rightarrow |K|$ alors $H_*(i) : H_*(K') \rightarrow H_*(K)$ est un isomorphisme.
- (c) La composée $H_*(f) \circ H_*(i)^{-1} : H_*(K) \rightarrow H_*(L)$ ne dépend pas des choix faits pour K', f et i .

Nous démontrerons le théorème plus loin et commençons d'abord par l'exploiter :

Déf. Soit K un complexe simplicial fini dans un evn E , L un complexe simplicial et $g : |K| \rightarrow |L|$ une application continue. On définit $H_*(g) : H_*(K) \rightarrow H_*(L)$ (le **morphisme induit par g en homologie**) comme la composée $H_*(f) \circ H_*(i)^{-1}$ où K' est une subdivision de K dans E , $f : K' \rightarrow L$ une approximation simpliciale de g et $i : K' \rightarrow K$ est une approximation simpliciale de l'identité $|K'| \rightarrow |K|$.

D'après le théorème un tel triplet (K', f, i) existe et la composée $H_*(f) \circ H_*(i)^{-1}$ ne dépend pas du triplet choisi.

Prop. 5.11 (a) Soient K, L des complexes simpliciaux avec K fini et $f : K \rightarrow L$ une application simpliciale ; alors $H_*(|f|) = H_*(f)$.

(b) Soit K un complexe simplicial fini alors $H_*(\text{id}_{|K|}) = \text{id}_{H_*(K)}$.

(c) Soient K, L, M des complexes simpliciaux avec K et L finis, $f : |K| \rightarrow |L|$ et $g : |L| \rightarrow |M|$ des applications continues. Alors on a

$$H_*(g \circ f) = H_*(g) \circ H_*(f) .$$

Démonstration. f est une approximation simpliciale de $|f| : |K| \rightarrow |L|$ et id_K est une approximation simpliciale de $\text{id}_{|K|}$ ce qui permet de calculer $H_*(|f|)$ comme la composée $H_*(f) \circ H_*(\text{id}_K)^{-1} = H_*(f)$ d'où le point (a).

Le point (b) est un cas particulier du point (a) puisque $\text{id}_{|K|} = |\text{id}_K|$.

Pour le point (c) soit $(L', \tilde{g} : L' \rightarrow M)$ tel que L' est une subdivision de L et \tilde{g} est une approximation simpliciale de g . Soit $(K', \tilde{f} : K' \rightarrow L')$ tel que K' est une subdivision de K et \tilde{f} est une approximation simpliciale de $f : |K'| = |K| \rightarrow |L'| = |L|$. Soit $i_K : K' \rightarrow K$, respectivement $i_L : L' \rightarrow L$, une approximation simpliciale de $\text{id}_{|K'|}$, respectivement de $\text{id}_{|L'|}$. Alors $\tilde{g} \circ \tilde{f}$ est une approximation simpliciale de $g \circ f$ relative à K' et M et $i_L \circ \tilde{f}$ est une approximation simpliciale de f relative à K' et L .

$$\begin{array}{ccccc} |K| & \xrightarrow{f} & |L| & \xrightarrow{g} & |M| \\ \parallel & & \uparrow |i_L| & \nearrow & \\ |K| & \longrightarrow & |L'| & \nearrow | \tilde{g} | & \\ \uparrow |i_K| & \nearrow & & & \\ |K'| & \xrightarrow{\tilde{f}} & & & \end{array}$$

On a donc $H_*(g \circ f) = H_*(\tilde{g}) \circ H_*(\tilde{f}) \circ H_*(i_K)^{-1}$,

$$H_*(g) = H_*(\tilde{g}) \circ H_*(i_L)^{-1},$$

$$H_*(f) = H_*(i_L) \circ H_*(\tilde{f}) \circ H_*(i_K)^{-1},$$

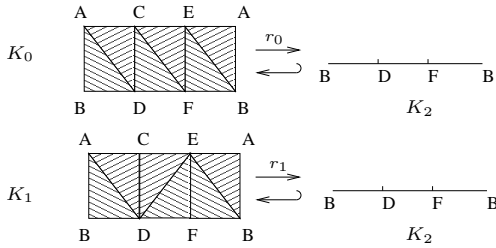
D'où le résultat.

□

Corolaire 5.12 Soient K, L deux complexes simpliciaux finis et $g : |K| \rightarrow |L|$ un homéomorphisme ; alors $H_*(g)$ est un isomorphisme d'inverse $H_*(g^{-1})$.

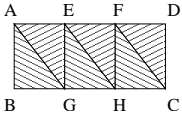
Démonstration. On a $g \circ g^{-1} = \text{id}_L$ et $g^{-1} \circ g = \text{id}_K$ donc $H_*(g) \circ H_*(g^{-1}) = \text{id}_{H_*(L)}$ et $H_*(g^{-1}) \circ H_*(g) = \text{id}_{H_*(K)}$ □

Ex. 1) On reprend les deux triangulations K_0 et K_1 du cylindre $|K_0| \simeq |K_1|$ données dans la section 3 (figure ci-dessous).



K_2 est un retract de K_0 et de K_1 et on sait que la rétraction $r_1 : K_1 \rightarrow K_0$ induit un isomorphisme en homologie. On a $|r_0| = |r_1| \circ g : |K_0| \rightarrow |K_2|$, où on a noté g l'homéomorphisme $|K_0| \rightarrow |K_1|$, donc $H_*(r_0) = H_*(r_1) \circ H_*(g)$. D'après le corollaire 5.12 $H_*(g)$ est un isomorphisme. On en conclut que $H_*(r_0)$ est un homéomorphisme.

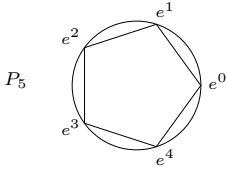
2) On note K la triangulation indiquée du rectangle plein $ABCD$ (figure ci-dessous). On note L le complexe simplicial formé du triangle plein ABC et de ses faces.



On peut construire un homéomorphisme de $|K|$ dans $|L|$ comme suit : Soit I le milieu de $[AC]$. Soit f_0 l'isomorphisme affine $ABI \rightarrow ABD$ qui envoie A sur A , B sur B et I sur D . Soit f_1 l'isomorphisme affine $BCI \rightarrow BCD$ qui envoie B sur B , C sur C et I sur D . f_0 et f_1 coïncident sur le segment $[B, I]$ donc définissent une application continue $f : |K| \rightarrow |L|$. De même les applications f_0^{-1} et f_1^{-1} coïncident sur le segment $[B, D]$ donc définissent une application continue $g : |L| \rightarrow |K|$. On vérifie que les composées $g \circ f$ et $f \circ g$ sont les applications identité de ABC et de $ABCD$ respectivement.

D'après le corollaire, l'application $f : |K| \rightarrow |L|$ induit un isomorphisme en homologie $H_*(K) \rightarrow H_*(L)$. Or L est isomorphe au simplexe standard $\Delta[2]$ donc l'application $L \rightarrow \text{pt}$ induit un isomorphisme en homologie. L'unique application $K \rightarrow \text{pt}$, qui peut aussi s'écrire comme la composée $K \rightarrow L \rightarrow \text{pt}$, induit donc un isomorphisme en homologie.

3) Pour chaque entier $n \geq 3$ on note P_n le complexe simplicial dans \mathbb{C} formé des segments $[e^{\frac{2ik\pi}{n}}, e^{\frac{2i(k+1)\pi}{n}}]$, $0 \leq k \leq n-1$, et de leurs faces. P_3 est isomorphe à $\partial\Delta[2]$ (le bord du simplexe standard de dimension 2).



L'application $|P_n| \rightarrow S^1$, $z \mapsto \frac{z}{|z|}$ est un homéomorphisme. Par composition on en déduit un homéomorphisme $g_n : |P_n| \rightarrow |P_3|$ donc un isomorphisme $H_*(P_n) \simeq H_*(P_3)$.

Pour quelles valeurs de n l'application g_n admet-elle une approximation simpliciale $P_n \rightarrow P_3$? L'application $g_n^{-1} : |P_3| \rightarrow |P_n|$ admet-elle une approximation simpliciale $P_3 \rightarrow P_n$?

Soit f_n l'application simpliciale $P_n \rightarrow P_3$ définie par $e^{\frac{2ik\pi}{n}} \mapsto e^{\frac{2ik\pi}{3}}$ si $k = 0, 1, 2$ et $e^{\frac{2ik\pi}{n}} \mapsto e^0$ si $k \geq 3$. Peut-on déduire de ce qui précède que $H_*(f_n)$ est un isomorphisme ?

Démonstration du théorème 5.10

Le point (a) s'obtient en prenant pour K' la subdivision barycentrique itérée $\text{sb}^n(K)$ avec n suffisamment grand en vertu de la proposition 5.5 et du corollaire 5.9.

On commence par démontrer le point (b) dans le cas où $K' = \text{sb}(K)$ et $i : K' \rightarrow K$ est une approximation simpliciale de $\text{id}_{|K|}$ vérifiant $i(\text{sb}(K)(\sigma)) \subset K(\sigma)$ pour tout $\sigma \in K$. Un tel i existe par la proposition 5.7.

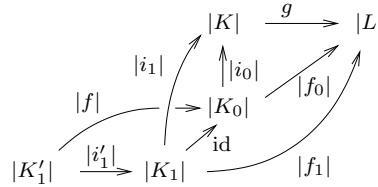
On applique le théorème des modèles acycliques (théorème 23) au triplet $(K, \text{sb}(K), \Phi : \sigma \mapsto \text{sb}(K)(\sigma))$: l'application $\text{sb}(K)(\sigma) \rightarrow \text{pt}$ induit bien un isomorphisme en homologie par le point (c) de la proposition 5.8. il existe donc un morphisme de complexes de groupes abéliens $\phi : C_*(K) \rightarrow C_*(\text{sb}(K))$ porté par Φ . On observe que les morphismes $i_* \circ \phi : C_*(K) \rightarrow C_*(K)$ comme $\text{id}_{C_*(K)}$ sont portés par $\sigma \mapsto K(\sigma)$ donc ils sont homotopes

par le théorème des modèles acycliques (l'application $K(\sigma) \rightarrow \text{pt}$ induit un isomorphisme en homologie puisque $K(\sigma)$ est isomorphe à $\Delta[\dim(\sigma)]$). Donc $H_*(i) \circ H_*(\phi) = \text{id}_{H_*(K)}$. De même la composée $\phi \circ i_*$ tout comme $\text{id}_{C_*(\text{sb}(K))}$ est portée par $\sigma \mapsto \text{sb}(K)(\tau_\sigma)$ où τ_σ est le simplexe de K de dimension minimale telle que $|\sigma| \subset |\tau_\sigma|$; donc $H_*(\phi) \circ H_*(i) = \text{id}_{H_*(\text{sb}(K))}$. Le morphisme $H_*(i)$ est donc bien un isomorphisme.

En itérant la subdivision barycentrique on obtient pour tout entier n l'existence d'une approximation simpliciale $i_n : \text{sb}^n(K) \rightarrow K$ de $\text{id}_{|K|}$ telle que $H_*(i_n)$ soit un isomorphisme. Si $i : \text{sb}^n(K) \rightarrow K$ est une approximation simpliciale quelconque de $\text{id}_{|K|}$ alors $H_*(i)$ est encore un isomorphisme puisque deux approximations simpliciales d'une même application sont contiguës.

Soient maintenant K' une subdivision quelconque de K et $i : K' \rightarrow K$ une approximation simpliciale de $\text{id}_{|K|}$. D'après la démonstration du point (a) il existe une approximation simpliciale $j : \text{sb}^n(K) \rightarrow K'$ de l'identité $|K| \rightarrow |K'|$ pour un entier n convenable. La composée $i \circ j : \text{sb}^n(K) \rightarrow K$ est une approximation simpliciale de $\text{id}_{|K|}$ donc $H_*(i \circ j) = H_*(i) \circ H_*(j)$ est un isomorphisme. En particulier le morphisme $H_*(j)$ est injectif en chaque degré. Il existe de même une approximation simpliciale $k : \text{sb}^m(K') \rightarrow \text{sb}^n(K)$ de l'identité $|K'| \rightarrow |\text{sb}^n(K)|$ et la composée $j \circ k$ est une approximation simpliciale de $\text{id}_{|K'|}$ donc $H_*(j) \circ H_*(k)$ est un isomorphisme et en particulier $H_*(j)$ est surjectif en chaque degré. On en déduit que $H_*(j)$ est un isomorphisme puis que $H_*(i)$ est un isomorphisme.

Le point (c) est une conséquence des points (a) et (b) : Soient $(K_0, f_0 : K_0 \rightarrow L)$ et $(K_1, f_1 : K_1 \rightarrow L)$ deux approximations simpliciales de g . Soit $i_0 : K_0 \rightarrow K$, respectivement $i_1 : K_1 \rightarrow K$, une approximation simpliciale de $\text{id}_{|K|}$. D'après le point (a) il existe une subdivision K'_1 de K_1 et une application simpliciale $f : K'_1 \rightarrow K_0$ qui est une approximation simpliciale de l'identité $|K_1| \rightarrow |K_0|$. Soit $i'_1 : K'_1 \rightarrow K_1$ une approximation simpliciale de $\text{id}_{|K_1|}$.



D'après (b) les morphismes $H_*(i_0)$, $H_*(i_1)$ et $H_*(i'_1)$ sont iso.

K'_1 est une subdivision de K_1 donc de K et $i_0 \circ f : K'_1 \rightarrow K$ est une approximation simpliciale de $\text{id} : |K'_1| \rightarrow |K|$ comme composée d'approximations simpliciales donc d'après (b) $H_*(i_0 \circ f) = H_*(i_0) \circ H_*(f)$ est iso. Comme $H_*(i_0)$ est iso, $H_*(f)$ l'est également. La composée $i_1 \circ i'_1 : K'_1 \rightarrow K$ est également une approximation simpliciale de $\text{id} : |K'_1| \rightarrow |K|$ donc d'après la proposition 5.3 $i_1 \circ i'_1$ et $i_0 \circ f$ sont contiguës donc $H_*(i_1 \circ i'_1) = H_*(i_0 \circ f)$.

Les composées $f_1 \circ i'_1$ et $f_0 \circ f$ sont toutes deux des approximations simpliciales de g relatives à K'_1 et L donc sont contiguës donc $H_*(f_1 \circ i'_1) = H_*(f_0 \circ f)$.

$$\begin{aligned}
\text{On écrit } H_*(f_1) \circ H_*(i_1)^{-1} &= H_*(f_1) \circ H_*(i'_1) \circ H_*(i'_1)^{-1} \circ H_*(i_1)^{-1} \\
&= H_*(f_1 \circ i'_1) \circ H_*(i_1 \circ i'_1)^{-1} \\
&= H_*(f_0 \circ f) \circ H_*(i_0 \circ f)^{-1} \\
&= H_*(f_0) \circ H_*(f) \circ H_*(f)^{-1} \circ H_*(i_0)^{-1} \\
&= H_*(f_0) \circ H_*(i_0)^{-1}
\end{aligned}$$

□

Ex. Démontrer le point (b) du théorème pour $i : \text{sb}(K) \rightarrow K$ une approximation simpliciale de $\text{id}_{|K|}$ vérifiant $\forall \sigma \in K, i(\text{sb}(K)(\sigma)) \subset K(\sigma)$ avec la suite exacte de Mayer-Vietoris plutôt que le théorème des modèles acycliques.