

# M2 Math – Topologie Algébrique

(version du 11 février 2009)

## 4. La suite exacte de Mayer-Vietoris - I

*Suite exacte de groupes abéliens*

On note communément 0 le groupe abélien nul  $\{0\}$ .

**Déf.** Soient  $A, B, C$  des groupes abéliens et  $f : A \rightarrow B, g : B \rightarrow C$  des homomorphismes. On dit que la suite  $A \xrightarrow{f} B \xrightarrow{g} C$  est **exacte** si le noyau de  $g$  est égal à l'image de  $f$ .

On dit qu'une suite longue de groupes abéliens et d'homomorphismes

$$\cdots \rightarrow A_n \rightarrow A_{n+1} \rightarrow A_{n+2} \rightarrow \cdots$$

(éventuellement de longueur infinie) est exacte si toutes les sous-suites  $A_n \rightarrow A_{n+1} \rightarrow A_{n+2}$  sont exactes.

Une suite exacte de la forme  $0 \rightarrow A \rightarrow B \rightarrow C \rightarrow 0$  est appelée **suite exacte courte**.

Si  $C_*$  est un complexe de groupes abéliens, il revient au même de dire que la suite  $\cdots \rightarrow C_1 \rightarrow C_0 \rightarrow 0$  est exacte ou que l'homologie du complexe  $C_*$  est nulle en chaque degré.

**Lemme 4.1** 1) Une suite  $0 \rightarrow A \xrightarrow{f} B$  est exacte ssi  $f$  est injective.

2) une suite  $A \xrightarrow{f} B \rightarrow 0$  est exacte ssi  $f$  est surjective.

3) Soit  $A \xrightarrow{f} B \xrightarrow{g} C \xrightarrow{h} D$  une suite exacte ; alors  $g$  induit un isomorphisme de  $\text{coker}(f) = B/\text{im}(f)$  sur  $\text{ker}(h)$ .

*Suite exacte courte de complexes de groupes abéliens et suite exacte longue en homologie*

**Déf.** Soient  $A_*, B_*, C_*$  des complexes de groupes abéliens et  $f_* : A_* \rightarrow B_*, g_* : B_* \rightarrow C_*$  des morphismes de complexes. On dit que la suite

$$0 \rightarrow A_* \xrightarrow{f_*} B_* \xrightarrow{g_*} C_* \rightarrow 0$$

est une **suite exacte courte de complexes de groupes abéliens** si pour chaque entier  $n$  la suite de groupes abéliens  $0 \rightarrow A_n \xrightarrow{f_n} B_n \xrightarrow{g_n} C_n \rightarrow 0$  est exacte.

Par functorialité  $f_*$  et  $g_*$  induisent en homologie la suite de morphismes  $H_*(A) \rightarrow H_*(B) \rightarrow H_*(C)$  dont la composée est nulle puisque c'est le morphisme induit en homologie par le morphisme nul.

Soit  $0 \rightarrow A_* \xrightarrow{f_*} B_* \xrightarrow{g_*} C_* \rightarrow 0$  une suite exacte courte de complexes. On construit pour chaque entier  $n$  un homomorphisme  $\partial_n : H_n(C) \rightarrow H_{n-1}(A)$ , appelé **connectant**, comme suit :

Soit  $x \in H_n(C)$ . On choisit un cycle  $c$  représentant  $x$ .  $c$  est défini modulo le sous-groupe  $d(C_{n+1})$  de  $C_n$ . Puisque  $g_n : B_n \rightarrow C_n$  est surjective, il existe un élément  $b \in B_n$  d'image  $c$  par  $g_n$ .  $b$  est défini modulo le sous-groupe  $g_n^{-1}(dC_{n+1}) = dB_{n+1} + f_n(A_n)$  de  $B_n$ , donc  $d(b) \in B_{n-1}$  est défini modulo le sous-groupe  $df_n(A_n) = f_n(dA_n)$ . On a  $g_{n-1}(db) = dc = 0$  donc  $db$  est dans l'image de  $f_{n-1}$  : il existe  $a \in A_{n-1}$  tel que  $f_{n-1}(a) = db$ .  $a$  est défini modulo  $dA_{n-1}$  puisque  $f$  est injective et puisque  $db$  est défini modulo  $f_n(dA_n)$ .  $a$  est un cycle de  $A_{n-1}$  car  $f_{n-1}(da) = ddb = 0$  et  $f$  est injective. On définit  $\partial_n(x)$  comme la classe de  $a$  dans  $H_{n-1}(A)$ .  $\partial_n$  ainsi défini est un homomorphisme de groupes  $H_n(C) \rightarrow H_{n-1}(A)$ .

L'homomorphisme  $\partial_n$  est naturel en la suite  $0 \rightarrow A_* \xrightarrow{f_*} B_* \xrightarrow{g_*} C_* \rightarrow 0$  : Si on a un diagramme commutatif de complexes de groupes abéliens

$$\begin{array}{ccccccc} 0 & \longrightarrow & A_* & \xrightarrow{f_*} & B_* & \xrightarrow{g_*} & C_* \longrightarrow 0 \\ & & \downarrow \alpha_* & & \downarrow \beta_* & & \downarrow \gamma_* \\ 0 & \longrightarrow & A'_* & \xrightarrow{f'_*} & B'_* & \xrightarrow{g'_*} & C'_* \longrightarrow 0 \end{array} \quad (1)$$

où les suites horizontales sont exactes, alors pour tout entier  $n$  le diagramme

$$\begin{array}{ccc} \mathbf{H}_n(C) & \xrightarrow{\partial_n} & \mathbf{H}_{n-1}(A) \\ \downarrow \mathbf{H}_n(\gamma) & & \downarrow \mathbf{H}_{n-1}(\alpha) \\ \mathbf{H}_n(C') & \xrightarrow{\partial_n} & \mathbf{H}_{n-1}(A') \end{array}$$

est également commutatif.

**Prop. 4.2** La suite de groupes abéliens et d'homomorphismes

$$\begin{aligned} \dots \xrightarrow{\partial_{n+1}} \mathbf{H}_n(A) \xrightarrow{\mathbf{H}_n(f)} \mathbf{H}_n(B) \xrightarrow{\mathbf{H}_n(g)} \mathbf{H}_n(C) \xrightarrow{\partial_n} \mathbf{H}_{n-1}(A) \xrightarrow{\mathbf{H}_{n-1}(f)} \mathbf{H}_{n-1}(B) \rightarrow \dots \\ \xrightarrow{\partial_1} \mathbf{H}_0(A) \xrightarrow{\mathbf{H}_0(f)} \mathbf{H}_0(B) \xrightarrow{\mathbf{H}_0(g)} \mathbf{H}_0(C) \rightarrow 0 \end{aligned}$$

est exacte.

On l'appelle la **suite exacte longue en homologie** associée à la suite exacte courte de complexes  $0 \rightarrow A_* \xrightarrow{f_*} B_* \xrightarrow{g_*} C_* \rightarrow 0$ .

*Comparaison de suite exactes longues – le lemme des cinq*

**Lemme 4.3** (dit “lemme des cinq”) Soit

$$\begin{array}{ccccccccc} A_1 & \longrightarrow & A_2 & \longrightarrow & A_3 & \longrightarrow & A_4 & \longrightarrow & A_5 \\ \downarrow f_1 & & \downarrow f_2 & & \downarrow f_3 & & \downarrow f_4 & & \downarrow f_5 \\ B_1 & \longrightarrow & B_2 & \longrightarrow & B_3 & \longrightarrow & B_4 & \longrightarrow & B_5 \end{array}$$

un diagramme commutatif de groupes abéliens. Si les homomorphismes  $f_1, f_2, f_4, f_5$  sont des isomorphismes alors  $f_3$  est également un isomorphisme.

**Corolaire 4.4** Considérons le diagramme commutatif de complexes de groupes abéliens (1) donné plus haut, où les suites horizontales sont exactes. Si deux des morphismes  $\alpha_*, \beta_*, \gamma_*$  induisent un isomorphisme en homologie alors il en est de même du troisième.

*Paire de sous-complexes d'un complexe simplicial et suite exacte de Mayer-Vietoris*

Soient  $K, K'$  deux sous-complexes d'un complexe simplicial  $L$ , alors  $K \cup K'$  est un sous-complexe simplicial de  $L$  contenant  $K$  et  $K'$ ;  $K \cap K'$  est un sous-complexe simplicial de  $L$  contenu dans  $K$  et dans  $K'$ . On note  $i, j, p, q$  les inclusions  $K \cap K' \rightarrow K, K \cap K' \rightarrow K', K \rightarrow K \cup K'$  et  $K' \rightarrow K \cup K'$  respectivement.

On note  $C_*(K) \oplus C_*(K')$  le complexe formé en chaque degré  $n$  par la somme directe  $C_n(K) \oplus C_n(K')$  muni de la différentielle  $(x, x') \mapsto (dx, dx')$ . L'homologie de ce complexe est degré par degré la somme directe des homologies de  $K$  et de  $K'$ .

**Prop. 4.5** La suite de complexes de groupes abéliens

$$0 \rightarrow C_*(K \cap K') \xrightarrow{(i_*, j_*)} C_*(K) \oplus C_*(K') \xrightarrow{(p_*, -q_*)} C_*(K \cup K') \rightarrow 0$$

est exacte.

$((i_*, j_*)$  est le morphisme  $x \mapsto (i_*(x), j_*(x))$ ;  $(p_*, -q_*)$  est le morphisme  $(x, x') \mapsto p_*(x) - q_*(x')$ .)

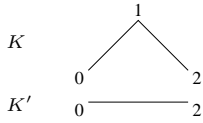
**Déf.** On appelle **suite exacte de Mayer-Vietoris** la suite exacte longue en homologie associée à cette suite exacte courte de complexes :

$$\begin{aligned} \dots \xrightarrow{\partial_{n+1}} \mathbf{H}_n(K \cap K') \xrightarrow{(\mathbf{H}_n(i), \mathbf{H}_n(j))} \mathbf{H}_n(K) \oplus \mathbf{H}_n(K') \xrightarrow{(\mathbf{H}_n(p), -\mathbf{H}_n(q))} \mathbf{H}_n(K \cup K') \xrightarrow{\partial_n} \mathbf{H}_{n-1}(K \cap K') \rightarrow \\ \dots \xrightarrow{\partial_1} \mathbf{H}_0(K \cap K') \xrightarrow{(\mathbf{H}_0(i), \mathbf{H}_0(j))} \mathbf{H}_0(K) \oplus \mathbf{H}_0(K') \xrightarrow{(\mathbf{H}_0(p), -\mathbf{H}_0(q))} \mathbf{H}_0(K \cup K') \rightarrow 0 \end{aligned}$$

Comparaison : Soient  $L_0$  et  $L_1$  des complexes simpliciaux,  $K_0, K'_0$  des sous-complexes de  $L_0$ ,  $K_1, K'_1$  des sous-complexes de  $L_1$  et  $f : L_0 \rightarrow L_1$  une application simpliciale telle que  $f(K_0) \subset K_1$  et  $f(K'_0) \subset K'_1$ . On écrira  $f : (L_0, K_0, K'_0) \rightarrow (L_1, K_1, K'_1)$ .

**Prop. 4.6** Soit  $f : (L_0, K_0, K'_0) \rightarrow (L_1, K_1, K'_1)$  une application simpliciale. On suppose que les restrictions de  $f : K_0 \cap K'_0 \rightarrow K_1 \cap K'_1$ ,  $K_0 \rightarrow K'_0$  et  $K_1 \rightarrow K'_1$  induisent des isomorphismes en homologie ; alors il en est de même de l'application  $f : K_0 \cup K'_0 \rightarrow K_1 \cup K'_1$ .

**Ex. 1)**  $L = \partial\Delta[2]$ ,  $K$  est le sous-complexe de  $L$  formé des simplexes  $\{0, 1\}$ ,  $\{1, 2\}$  et de leurs faces ;  $K'$  est le sous-complexe de  $L$  formé du simplexe  $\{0, 2\}$  et de ses faces. On a  $L = K \cup K'$ ,  $K \cap K' = \{\{0\}, \{2\}\}$  réunion disjointe de deux points.



Le sous-complexe de  $K$  formé du seul sommet 0 est un retract par déformation contiguë du sous-complexe de  $K$  formé du simplexe  $\{0, 1\}$  et de ses faces, lequel est un retract par déformation contiguë de  $K$ , donc l'application  $K \rightarrow \text{pt}$  induit un isomorphisme en homologie. On montre de même que l'application  $K' \rightarrow \text{pt}$  induit un isomorphisme en homologie.

On a  $H_0(K \cap K') \simeq \mathbb{Z}^{\{[0],[2]\}}$  (le groupe abélien libre engendré par  $[0]$  et  $[1]$ ) ;  $H_n(K \cap K') = 0$  si  $n > 0$  puisque les simplexes de  $K \cap K'$  sont de dimension 0.

$H_n(K) \simeq H_n(K') \simeq H_n(\text{pt}) = 0$  si  $n > 0$  ;  $H_0(K) \rightarrow H_0(\text{pt}) = \mathbb{Z}$  est iso, de même que  $H_0(K') \rightarrow H_0(\text{pt}) = \mathbb{Z}$ .

Via ces isomorphismes,  $H_0(i)$  est l'homomorphisme donné par  $[0] \mapsto 1$ ,  $[2] \mapsto 1$  et  $H_0(j)$  est l'homomorphisme donné par  $[0] \mapsto 1$ ,  $[2] \mapsto 1$  puisque le diagramme  $K \cap K' \rightarrow K$  commute.



La suite exacte de Mayer-Vietoris se réduit aux suites exactes  $0 \rightarrow H_n(L) \rightarrow 0$  pour  $n > 1$  et

$$0 \rightarrow H_1(L) \rightarrow \mathbb{Z}^{\{[0],[2]\}} \xrightarrow{(H_0(i), H_0(j))} \mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z} \rightarrow H_0(L) \rightarrow 0$$

L'homomorphisme  $(H_0(i), H_0(j))$  a pour matrice  $\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$  dans les bases canoniques de  $\mathbb{Z}^{\{[0],[2]\}}$  et de  $\mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z}$ . Son noyau est le sous-groupe de  $\mathbb{Z}^{\{[0],[2]\}}$  engendré par  $[0] - [1]$ , son image est le sous-groupe de  $\mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z}$  engendré par  $(1, 1)$ , lequel admet le sous-groupe engendré par  $(1, 0)$  pour supplémentaire.

On obtient ainsi  $H_1(L) \simeq \mathbb{Z}$  et  $H_0(L) \simeq \mathbb{Z}$ .

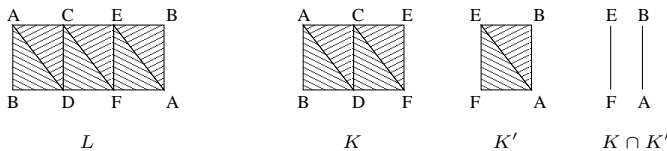
2) Soit  $P_n$ ,  $n \geq 3$ , le complexe simplicial formé des 1-simplexes  $\{0, 1\}, \{1, 2\}, \dots, \{n-2, n-1\}, \{n-1, 0\}$  et de leurs faces. ( $P_n$  est le complexe simplicial abstrait associé au polygone convexe à  $n$ -côtés ;  $P_3 \simeq \partial\Delta[2]$ .)

On note  $K_n$  le sous-complexe de  $P_n$  formé des simplexes  $\{0, 1\}, \{1, 2\}, \dots, \{n-2, n-1\}$  (ligne brisée) et  $K'_n$  le sous-complexe formé du simplexe  $\{0, n-1\}$ .

On considère l'application simpliciale  $f_n : P_n \rightarrow P_3$ ,  $0 \mapsto 0$ ,  $1 \mapsto 1$  et  $k \mapsto 2$  pour  $2 \leq k \leq n-1$ . Elle envoie  $K_n$  sur  $K_3$  et est un isomorphisme de  $K'_n$  sur  $K'_3$  comme de  $K_n \cap K'_n$  sur  $K_3 \cap K'_3$  donc induit des isomorphismes en homologie  $H_*(K'_n) \rightarrow H_*(K'_3)$  et  $H_*(K_n \cap K'_n) \rightarrow H_*(K_3 \cap K'_3)$ . Par ailleurs il existe une suite de retracts par déformation contiguë partant de  $K_n$  aboutissant au sous-complexe  $\{\{0\}\} \simeq \text{pt}$  de  $P_n$  donc l'application  $K_n \rightarrow \text{pt}$  induit un isomorphisme en homologie.

On en déduit avec la proposition 4.6 que  $H_*(f_n) : H_*(P_n) \rightarrow H_*(P_3)$  est un isomorphisme. Avec les calculs faits en 1) on obtient  $H_k(P_n) \simeq \mathbb{Z}$  si  $k = 0, 1$  et  $H_k(P_n) = 0$  si  $k > 1$ .

3) Homologie de la triangulation  $L$  donnée ci-dessous du cylindre



On considère l'application simpliciale  $f : L \rightarrow P_3$  donnée par  $A, B \mapsto 0$ ,  $C, D \mapsto 1$ ,  $E, F \mapsto 2$  ; alors  $f$  envoie  $K$  sur  $K_3$  et  $K'$  sur  $K'_3$  avec les notations de l'exemple 2 ci-dessus. On observe que  $K_3$ ,  $K'_3$  et  $K_3 \cap K'_3$  s'identifient à des retracts par déformations contiguës de  $K$ ,  $K'$  et  $K \cap K'$  de façon compatible avec  $f$ . La proposition 4.6 montre alors que  $H_*(f) : H_*(L) \rightarrow H_*(P_3)$  est un isomorphisme (alors qu'il n'y a pas de déformation contiguë de  $L$  sur  $P_3$ ).