M2 Math – Topologie Algébrique

(version du 26 janvier 2009)

3. Homologie simpliciale

Simplexes numérotés, orientés

Soient K un complexe simplicial et σ un simplexe de K de dimension n (ou n-**simplexe**). Une numérotation des sommets de σ est la donnée d'une bijection f de $\{0,\ldots,n\}$ dans l'ensemble S_σ des sommets de σ ou de façon équivalente d'un ordre total sur l'ensemble des sommets de σ (et on posera $f(0) =$ "le plus petit élément", etc.). Elle est décrite par le $n+1$-uplet formé des sommets de σ écrits dans l'ordre. On notera ainsi $(A_0,\ldots,A_n)$ un **simplexe numéroté** de dimension n. $(A_{\varphi(0)},\ldots,A_{\varphi(n)})$, φ décrivant l'ensemble des permutations de $\{0,\ldots,n\}$, décrit l'ensemble des numérotations d'un même simplexe d'ensemble de sommets $\{A_0,\ldots,A_n\}$.

Déf. Une orientation de σ est la donnée d'une numérotation $f : \{0,\ldots,n\} \to S_\sigma$ à une permutation paire (*i.e.* de signature 1) près de $\{0,\ldots,n\}$. La donnée d'un simplexe σ et d'une orientation est appelée **simplexe orienté** de K.

On note $[A_0,\ldots,A_n]$ le simplexe orienté associé à la numérotation $(A_0,\ldots,A_n)$ des sommets de σ. Les simplexes de dimension 0 n'admettent qu'une seule orientation ; les simplexes de dimension > 0 admettent exactement deux orientations.

Ex. Considérons le complexe simplicial $\triangle[2] = \{\{0\},\{1\},\{2\},\{0,1\},\{0,2\},\{1,2\},\{0,1,2\}\}$. Les simplexes de dimension 0 : $\{0\},\{1\},\{2\}$ n'ont qu'une seule orientation puisqu'ils n'ont qu'une seule numérotation. Chaque simplexe de dimension 1 a deux orientations qui correspondent aux deux numérotations : par exemple $(0,1)$ et $(1,0)$ définissent deux orientations différentes du simplexe $\{0,1\}$. Le simplexe $\{0,1,2\}$ admet six numérotations différentes qui donnent les deux orientations suivantes : $[0,1,2] = [1,2,0] = [2,0,1]$ et $[1,0,2] = [0,2,1] = [2,1,0]$.

Complexe des chaînes

Déf. Le groupe des **chaîne en degré** n d'un complexe simplicial K est le groupe quotient du groupe abélien libre de base les simplexes numérotés de dimension n de K par la relation sur les générateurs :

$$(A_0,\ldots,A_n) \sim \epsilon(\varphi)(A_{\varphi(0)},\ldots,\varphi(n))$$

pour tout n-simplexe numéroté $(A_0,\ldots,A_n)$ de K et toute permutation φ de $\{0,\ldots,n\}$, où $\epsilon(\varphi) \in \{-1,1\}$ est la signature de φ. On le note $\mathrm{C}_n(K)$.

Deux simplexes numérotés $(A_0,\ldots,A_n)$ et $(A_{\varphi(0)},\ldots,\varphi(n))$ qui diffèrent par une permutation φ de signature 1 définissent le même élément de $\mathrm{C}_n(K)$. Cet élément ne dépend donc que du simplexe orienté $[A_0,\ldots,A_n]$, on le notera encore $[A_0,\ldots,A_n]$.

Prop. 3.1 Choisissons pour chaque n-simplexe σ de K une orientation $\mathcal{O}_\sigma$; alors toute chaîne en degré n de K s'écrit de manière unique comme combinaison linéaire à coefficients $\mathbb{Z}$ des n-simplexes orientés $(\sigma,\mathcal{O}_\sigma)$; autrement dit la famille $((\sigma,\mathcal{O}_\sigma))_\sigma$ indexée par les n-simplexes de K est une base de $\mathrm{C}_n(K)$.

En pratique on choisit une orientation des n-simplexes de K en choisissant un ordre total sur les sommmets de K : un tel ordre induit un ordre total sur les sommets de chaque simplexe de K donc une numérotation des sommets de ces simplexes. En pratique également on définit les homorphismes de $\mathrm{C}_n(K)$ dans un groupe abélien D par leurs valeurs sur les générateurs $(A_0,\ldots,A_n)$. On a en effet d'après les lemmes 2.2 et 2.3 :

Prop. 3.2 Pour tout groupe abélien D la donnée d'un morphisme de groupe abélien $f : \mathrm{C}_n(K) \to D$ équivaut à la donnée des images par f des générateurs $(A_0,\ldots,A_n)$ sous la condition

$$f((A_{\varphi(0)},\ldots,A_{\varphi(n)})) = \epsilon(\varphi)f((A_0,\ldots,A_n))$$

pour tout simplexe numéroté $(A_0,\ldots,A_n)$ et pour toute permutation φ.

Déf. On définit "l'opérateur de bord" $d_n : \mathrm{C}_n(K) \to \mathrm{C}_{n-1}(K)$ pour $n \geq 1$ par

$$\mathrm{d}_n((A_0,\ldots,A_n)) = \sum_{i=0}^{n}(-1)^i[A_0,\ldots,\hat{A}_i,\ldots,A_n]$$

pour tout générateur $(A_0, \ldots, A_n)$, où $[A_0, \ldots, \hat{A}_i, \ldots, A_n]$ désigne la classe du n-uplet obtenu en supprimant A_i en position i. On pose $\mathrm{d}_0 = 0$, le morphisme nul $\mathrm{C}_0(K) \to \{0\}$.

On vérifie que d_n est bien défini, *i.e.* qu'il vérifie $\mathrm{d}_n(A_{\varphi(0)}, \ldots, A_{\varphi(n)})) = \epsilon(\varphi)\mathrm{d}_n((A_0, \ldots, A_n))$ pour toute permutation φ.

Lemme 3.3 La composée $\mathrm{d}_n \circ \mathrm{d}_{n+1}$ est le morphisme nul $\mathrm{C}_{n+1}(K) \to \mathrm{C}_n(K)$, autrement dit la suite $\mathrm{d} = (\mathrm{d}_n)$ est une différentielle.

Déf. Le complexe de groupes abéliens $(\mathrm{C}_*(K), \mathrm{d})$ est appelé **complexe des chaînes** de K ; son homologie est appelé **homologie du complexe simplicial** K et noté $\mathrm{H}_*(K)$.

Ex. 1) $\mathrm{pt} = \triangle[0]$ est le complexe simplicial avec un seul simplexe et un seul sommet noté 0. $\mathrm{C}_0(\mathrm{pt})$ est le groupe abélien libre engendré par le seul 0-simplexe orienté $[0]$ et $\mathrm{C}_n(\mathrm{pt})$ est le groupe nul pour $n \neq 0$. Les différentielles sont forcément nulles. $\mathrm{H}_0(\mathrm{pt})$ est isomorphe à $\mathbb{Z}$, engendré par la classe du cycle $[0]$, et $\mathrm{H}_n(\mathrm{pt})$ est le groupe nul si $n \neq 0$.

2) $\partial\triangle[2]$ est le complexe simplicial formé des trois 1-simplexes $\{0,1\}$, $\{0,2\}$ et $\{1,2\}$ et de leurs faces.

$\mathrm{C}_0(\partial\triangle[2])$ est le groupe abélien libre de base $([0],[1],[2])$ (donc de dimension 3).

On obtient une base de $\mathrm{C}_1(\partial\triangle[2])$ en choisissant une orientation des 1-simplexes. L'ordre naturel sur les sommets $0, 1, 2$ donnent la base $([0,1],[0,2],[1,2])$.
La différentielle d_1 est donnée par $\mathrm{d}_1([0,1]) = [1] - [0]$, $\mathrm{d}_1([0,2]) = [2] - [0]$, $\mathrm{d}_1([1,2]) = [2] - [1]$.

Les groupes $\mathrm{C}_n(\partial\triangle[2])$ sont nuls pour $n \neq 0, 1$.

On observe que C_0 est la somme directe de $\mathbb{Z}.[0]$ avec $\mathrm{im}(d_1)$ donc $\mathrm{H}_0(\partial\triangle[2])$ est isomorphe à $\mathbb{Z}$, engendré par la classe de $[0]$.

$\mathrm{H}_1(\partial\triangle[2])$ est égal au noyau de d_1, donc à l'ensemble des combinaisons linéaires à coéfficients entiers $x[0,1] + y[0,2] + z[1,2]$ vérifiant

$$(-x-y)[0] + (x-z)[1] + (y+z)[2] = 0$$

soit $x = z = -y$. Le groupe d'homologie en degré 1 est donc isomorphe à $\mathbb{Z}$ engendré par $[0,1] - [0,2] + [1,2]$. On observe que cette 1-chaîne est le bord de la 2-chaîne $[0,1,2]$ dans $\mathrm{C}_*(\triangle[2])$.

Morphisme induit par une application simpliciale

Soit $f : K \to L$ un morphisme entre complexes simpliciaux. On s'est donc donné une application de l'ensemble S_K dans S_L vérifiant : Pour tout simplexe σ de K, il existe un simplexe τ de L tel que $f(S_\sigma) = S_\tau$, où S_K, S_L, S_σ, S_τ désignent l'ensemble des sommets de K, de L, de σ, etc..

Déf. On définit l'homomorphisme $\mathrm{C}_n(f) : \mathrm{C}_n(K) \to \mathrm{C}_n(L)$ sur les générateurs $[A_0, \ldots, A_n]$ par

$$\begin{aligned} \mathrm{C}_n(f)([A_0, \ldots, A_n]) &= [f(A_0), \ldots, f(A_n)] \text{ si les sommets } f(A_0), \ldots, f(A_n) \text{ sont distincts,} \\ &= 0 \text{ sinon.} \end{aligned}$$

L'homomorphisme $\mathrm{C}_n(f)$ est bien défini en vertu de la proposition 2 de car $\mathrm{C}_n(f)([A_{\varphi(0)}, \ldots, A_{\varphi(n)}]) = \epsilon(\varphi)\mathrm{C}_n(f)([A_0, \ldots, A_n])$ pour tout n-simplexe orienté $[A_0, \ldots, A_n]$ et toute permutation φ.

On note aussi f_* la suite d'homomorphismes $(\mathrm{C}_n(f))$.

Prop. 3.4 (a) $\mathrm{C}_n(\mathrm{id}) = \mathrm{id}_{\mathrm{C}_n(K)}$ et, pour des morphismes $f : K \to L$ et $g : L \to M$ entre complexes simpliciaux, $\mathrm{C}_n(g \circ f) = \mathrm{C}_n(g) \circ \mathrm{C}_n(f)$.

(b) f_* commute avec la différentielle d, *i.e.* pour tout entier $n \geq 0$, $\mathrm{d}_{n+1} \circ \mathrm{C}_{n+1}(f) = \mathrm{C}_n(f) \circ \mathrm{d}_{n+1} : \mathrm{C}_{n+1}(K) \to \mathrm{C}_n(L)$.

Le point (b) de la proposition dit que $f_* : \mathrm{C}_*(K) \to \mathrm{C}_*(L)$ est un morphisme de complexes de groupes abéliens. Il induit donc un morphisme $\mathrm{H}_*(K) \to \mathrm{H}_*(L)$ qu'on note encore f_*.

Ex. Soit L un complexe simplicial et K un sous-complexe simplicial de L ; alors l'inclusion $K \to L$ induit au niveau des complexes de chaînes un morphisme injectif $\mathrm{C}_*(K) \to \mathrm{C}_*(L)$ qui permet d'identifier $\mathrm{C}_*(K)$ à un sous-complexe de groupes abéliens de $\mathrm{C}_*(L)$. L'application induite en homologie $\mathrm{H}_*(K) \to \mathrm{H}_*(L)$ n'est pas injective en générale : par exemple l'inclusion $\partial\triangle[2] \to \triangle[2]$ induit le morphisme nul

$$\mathbb{Z} \simeq \mathrm{H}_1(\partial\triangle[2]) \to \mathrm{H}_1(\triangle[2]) \simeq 0 \ .$$

(Pour le calcul de $\mathrm{H}_1(\triangle[2])$ voir la description de $\mathrm{H}_*(\triangle[n])$ plus loin.)

Application : composantes connexes d'un complexe simplicial et homologie

Déf. Un complexe simplicial K est dit **connexe** si pour toute paire de sommets distincts A, B de K il existe une suite de 1-simplexes (désignés par leurs sommets) $\{A_0, A_1\}, \ldots, \{A_{n-1}, A_n\}$ de K tels que $A_0 = A$ et $A_n = B$.

Ex. Le complexe simplicial $\triangle[n]$ est connexe ; $\partial\triangle[1]$ n'est pas connexe.

Prop. 3.5 Soit K un complexe simplicial non vide et connexe ; alors le morphisme $K \to \mathrm{pt}$ induit un isomorphisme $\mathrm{H}_0(K) \to \mathrm{H}_0(\mathrm{pt})$.

Rq. L'homologie du point est nulle en degré strictement positif donc également le morphisme $\mathrm{H}_*(K) \to \mathrm{H}_*(\mathrm{pt})$.

Soit K un complexe quelquonque. On introduit la relation suivante sur éléments (les simplexes) de K : $\sigma \sim \tau$ si $\sigma = \tau$ ou s'il existe une suite de 1-simplexes $\{A_0, A_1\}, \ldots, \{A_{n-1}, A_n\}$ de K tels que A_0 est un sommet de σ et A_n est un sommet de τ.

Prop. 3.6 (a) Cette relation est une relation d'équivalence sur K.

(b) Les classes d'équivalence sont des sous-complexes simpliciaux connexes de K.

Comme les classes d'équivalence forment une partition de K on obtient une décomposition de K comme réunion disjointe de complexes simpliciaux connexes qu'on appelle **composantes connexes** de K.

Prop. 3.7 Soient K et L deux complexes simpliciaux et notons $K \sqcup L$ le complexe simplicial formé de la réunion disjointe de K et de L. Alors les inclusions $K \to K \sqcup L$ et $L \to K \sqcup L$ induisent pour tout entier n un isomorphisme

$$\mathrm{H}_n(K) \oplus \mathrm{H}_n(L) \to \mathrm{H}_n(K \sqcup L) .$$

Démonstration. Pour chaque entier n le groupe abélien $\mathrm{C}_n(K \sqcup L)$ est la somme directe des groupes abéliens $\mathrm{C}_n(K)$ et $\mathrm{C}_n(L)$ et la différentielle d_n est la somme directe des différentielles de $\mathrm{C}_n(K)$ et de $\mathrm{C}_n(L)$. $\square$

Corolaire 3.8 $\mathrm{H}_0(K)$ est un groupe abélien libre de dimension le nombre de composantes connexes de K.

Applications simpliciales contiguës et homologie

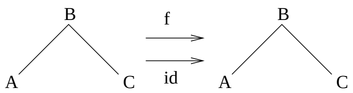
Déf. Deux morphismes $f, g : K \to L$ entre complexes simpliciaux sont dits **contiguës** si pour tout simplexe σ de K, il existe un simplexe τ de L tel que

$$f(S_\sigma) \cup g(S_\sigma) = S_\tau$$

(où S_σ, S_τ désigne l'ensemble des sommets de σ, etc.)

Cette relation est reflexive, symétrique mais pas transitive a priori.

Ex. 1) $K = L$ est le complexe simplicial dans $\mathbb{R}^2$ formé des segments $[A, B]$, $[B, C]$ et de leurs faces (figure ci-dessous). f est l'application simpliciale donnée par $A \mapsto A$, $B \mapsto B$, $C \mapsto B$; g est l'identité. Alors f et g sont contiguës.



Prenons maintenant $f : A \mapsto A$, $B \mapsto A$, $C \mapsto A$, alors f et g ne sont pas contiguës.

2) Montrer par un exemple que la relation de contiguïté n'est pas transitive.

Nous trouvons ici le premier théorème du cours :

Théorème 3.9 Si $f, g : K \to L$ sont deux applications simpliciales contiguës alors les morphismes induits en homologie $f_*, g_* : \mathrm{H}_*(K) \to \mathrm{H}_*(L)$ sont les mêmes.

Le théorème est la conséquence des deux propositions 10 et 11 qui suivent :

Déf. Deux morphismes $f_*, g_* : C_* \to D_*$ entre complexes de groupes abéliens sont dits homotopes s'il existe une suite d'homomorphismes $H_n : C_n \to D_{n+1}, n \geq 0$ vérifiant

$$\forall n \geq 0,\ f_n - g_n = \mathrm{d}_{n+1} H_n + H_{n-1} d_n$$

avec la convention $C_{-1} = \{0\}$, $H_{-1} =$ “le morphisme nul”.

Ex. Montrer que la relation d'homotopie entre morphismes de complexes de groupes abéliens est une relation d'équivalence.

Prop. 3.10 Si $f_*, g_* : C_* \to D_*$ sont des morphismes homotopes entre complexes de groupes abéliens alors les morphismes induits en homologie $f_*, g_* : C_* \to D_*$ sont les mêmes.

Prop. 3.11 Soient $f, g : K \to L$ deux morphismes contiguës entre complexes simpliciaux alors les morphismes induits $f_*, g_* : \mathrm{C}_*(K) \to \mathrm{C}_*(L)$ sont homotopes.

Cas particulier : on considère $K = L = \triangle[n]$ (le complexe simplicial abstrait formé de l'ensemble des parties non vides de $\{0, \dots, n\}$), $f = \mathrm{id}$ et g est le morphisme qui envoie tous les sommets de $\triangle[n]$ sur le sommet 0. Les morphismes f et g sont contiguës. La conclusion du théorème est que les morphismes $\mathrm{H}_*(f) = \mathrm{id}$ et $\mathrm{H}_*(g)$ sont les mêmes. Le morphisme g s'écrit comme la composée $g_1 \circ g_0$ où g_0 est l'unique morphisme $\triangle[n] \to \mathrm{pt}$ et où $g_1 : \mathrm{pt} \to \triangle[n]$ est l'inclusion qui envoie l'unique sommet de pt sur le sommet 0 de $\triangle[n]$. On a $\mathrm{H}_*(g_0) \circ \mathrm{H}_*(g_1) = \mathrm{H}_*(g_0 g_1) = \mathrm{id}$ et $\mathrm{H}_*(g_1) \circ \mathrm{H}_*(g_0) = \mathrm{H}_*(g)$. L'affirmation $\mathrm{H}_*(g) = \mathrm{id}$ permet de conclure que $\mathrm{H}_*(g_0)$ et $\mathrm{H}_*(g_1)$ sont deux isomorphismes inverses l'un de l'autre.

Plutôt que de déduire l'égalité $\mathrm{H}_*(g) = \mathrm{id}$ du théorème, on procède dans l'ordre inverse : on démontre la proposition 11 dans ce cas particulier et on en déduit la proposition dans le cas général donc le théorème comme expliqué plus haut.

Démonstration de la proposition 11 dans le cas $K = L = \triangle[n]$, $f = \mathrm{id}$, $g \equiv 0$.

On définit $H : \mathrm{C}_k(\triangle[n]) \to \mathrm{C}_{k+1}(\triangle[n])$ par

$$\begin{aligned} H([A_0, \dots, A_k]) &= [0, A_0, \dots, A_k] \text{ si } 0 \notin \{A_0, \dots, A_k\} \text{ (bien défini !)} \\ &= 0 \text{ sinon.} \end{aligned}$$

Pour $k = 0$ on a $(f_* - g_*)([A]) = [A] - [0]$ et $(dH + Hd)([A]) = dH([A])$ qui vaut 0 si $A = 0$, $d[0, A] = [A] - [0]$ si $A \neq 0$.

Pour $k > 0$ on a $(f_* - g_*)([A_0, \dots, A_k]) = [A_0, \dots, A_k]$ et si $0 \notin \{A_0, \dots, A_k\}$ alors

$$\begin{aligned} (dH + Hd)([A_0, \dots, A_k]) &= d[0, A_0, \dots, A_k] + H\big(\textstyle\sum_{i=0}^k (-1)^i [A_0, \dots, \hat{A}_i, \dots, A_k]\big) \\ &= [A_0, \dots, A_k] + \textstyle\sum_{i=0}^k (-1)^{i+1} [0, A_0, \dots, \hat{A}_i, \dots, A_k] \\ &\qquad + \textstyle\sum_{i=0}^k (-1)^i H([A_0, \dots, \hat{A}_i, \dots, A_k]) \\ &= [A_0, \dots, A_k] \end{aligned}$$

car $H([A_0, \dots, \hat{A}_i, \dots, A_k]) = [0, A_0, \dots, \hat{A}_i, \dots, A_k]$.

Si $0 = A_{i_0}$ alors

$$\begin{aligned} (dH + Hd)([A_0, \dots, A_k]) &= H\big(\textstyle\sum_{i=0}^k (-1)^i [A_0, \dots, \hat{A}_i, \dots, A_k]\big) \\ &= (-1)^{i_0} H\big([A_0, \dots, \hat{A_{i_0}}, \dots, A_k]\big) \\ &= (-1)^{i_0} [0, A_0, \dots, \hat{A_{i_0}}, \dots, A_k] \\ &= [A_0, \dots, A_k] \end{aligned}$$

car la permutation $(0, i_0)$ de $\{0, \dots, k\}$ est de signature $(-1)^{i_0}$.

On obtient :

Prop. 3.12 Le morphisme $\triangle[n] \to \mathrm{pt}$ induit un isomorphisme en homologie.

Démonstration de la proposition 11 dans le cas général.

Pour σ un simplexe de K ou de L on note $\mathrm{C}_*(\sigma)$ le sous-complexe de $\mathrm{C}_*(K)$ (ou de $\mathrm{C}_*(L)$) engendré par les simplexes orientés dont le simplexe sous-jacent est une face de σ (y compris σ !). Soit n la dimension de σ. Il existe un isomorphisme de $\triangle[n]$ dans le sous-complexe simplicial de K formé des faces de σ. En particulier l'homologie de $\mathrm{C}_*(\sigma)$ est égale à l'homologie du point.

Par hypothèse sur f et g il existe pour tout simplexe σ de K un simplexe τ_σ de L tel que $S_{\tau_\sigma} = f(S_\sigma) \cup g(S_\sigma)$ (τ_σ est déterminé par ses sommets donc est unique). La restriction de $f_* - g_*$ à $\mathrm{C}_*(\sigma)$ est alors à valeur dans $\mathrm{C}_*(\tau_\sigma)$.

On choisit une base de $\mathrm{C}_k(K)$ formée de k-simplexes orientés en fixant un ordre total sur les sommets de K. La donnée de $H : \mathrm{C}_k(K) \to \mathrm{C}_{k+1}(L)$ équivaut alors à la donnée des éléments $H([A_0, \ldots, A_k])$ de $\mathrm{C}_{k+1}(L)$, $[A_0, \ldots, A_k]$ décrivant les k-simplexes orientés de K avec $A_0 < \cdots < A_k$.

On définit H sur $\mathrm{C}_k(K)$ par récurrence sur k sous les deux conditions suivantes :

(R) $(dH + Hd) = f_* - g_*$.

(loc) $\forall \sigma \in K,\ H(\mathrm{C}_k(\sigma)) \subset \mathrm{C}_{k+1}(\tau_\sigma)$.

Pour $k = 0$ et $[A]$ un 0-simplexe orienté de K on a $f(A) = g(A)$ ou $\{f(A), g(A)\}$ est un 1-simplexe de L. On pose $H([A]) = [g(A), f(A)]$ si $f(A) \neq g(A)$, $H([A]) = 0$ sinon. Les conditions (R) et (loc) sont bien vérifiées.

Soit maintenant $k > 0$ et supposons H défini sur les $\mathrm{C}_i(K)$, $i < k$, vérifiant (R) et (loc). Soit $[A_0, \ldots, A_k]$, $A_0 < \cdots < A_k$ un vecteur de base de $\mathrm{C}_k(K)$ et notons τ le simplexe de L dont les sommets sont les éléments de $\{f(A_0, \ldots, f(A_k), g(A_0), \ldots, g(A_k)\}$.

On veut définir $H([A_0, \ldots, A_k])$ vérifiant $H([A_0, \ldots, A_k]) \in \mathrm{C}_{k+1}(\tau)$ (loc) et

$$dH([A_0, \ldots, A_k]) = (f_* - g_* - Hd)([A_0, \ldots, A_k]) \qquad \text{(R)}$$

(La restriction de d à $\mathrm{C}_k(K)$ est à valeurs dans $\mathrm{C}_{k-1}(K)$ donc la composée Hd est définie sur $\mathrm{C}_k(K)$.)

Une condition nécessaire et suffisante pour pouvoir définir H est que $(f_* - g_* - Hd)([A_0, \ldots, A_k])$ soit un bord dans $\mathrm{C}_k(L)$. Ceci ne peut avoir lieu que si $(f_* - g_* - Hd)([A_0, \ldots, A_k])$ est un cycle, ce qu'on vérifie :

On calcule

$$\begin{aligned} d(f_* - g_* - Hd) = df_* - dg_* - dHd &= f_*d - g_*d - (f_* - g_* - Hd)d \\ &\quad \text{car } f_* \text{ et } g_* \text{ sont des morphismes de complexes et } H \text{ vérifie (R)} \\ &= Hdd = 0 \\ &\quad (d \text{ est une différentielle}). \end{aligned}$$

Donc $d(f_* - g_* - Hd)$ est le morphisme nul. A fortiori $(f_* - g_* - Hd)([A_0, \ldots, A_k])$ est un cycle.

L'élément $(f_* - g_*)([A_0, \ldots, A_k])$ est dans $\mathrm{C}_k(\tau)$ (avec la définition de τ donnée plus haut) et pour chaque $i \in \{0, \ldots, k\}$, $H([A_0, \ldots, \hat{A}_i, \ldots, A_k]) \in \mathrm{C}_k(\tau_{\{A_0, \ldots, \hat{A}_i, \ldots, A_k\}}) \subset \mathrm{C}_k(\tau)$ puisque la restriction de H à $\mathrm{C}_{k-1}(K)$ vérifie la condition (loc) et puisque $\tau_{\{A_0, \ldots, \hat{A}_i, \ldots, A_k\}}$ est une face de τ. Donc $(f_* - g_* - Hd)([A_0, \ldots, A_k])$ est dans $\mathrm{C}_k(\tau)$. On a $\mathrm{H}_k(\mathrm{C}_k(\tau)) \simeq \mathrm{H}_k(\mathrm{pt}) = \{0\}$ d'après la discussion plus haut donc tout cycle de $\mathrm{C}_k(\tau)$ est le bord d'un élément de $\mathrm{C}_{k+1}(\tau)$. Ceci permet de définir $H([A_0, \ldots, A_k])$ vérifiant (R) et (loc).

□

La démonstration de la proposition 11 conduit à l'énoncé plus complet suivant appelé théorème des modèles acycliques :

Théorème 3.13 Soit K, L deux complexes simpliciaux. On suppose donné pour chaque simplexe σ de K un sous-complexe simplicial $\Phi(\sigma)$ de L vérifiant :

$$\begin{cases} \text{L'application } \Phi(\sigma) \to \mathrm{pt} \text{ induit un isomorphisme en homologie.} \\ \text{Si } \tau \text{ est une face de } \sigma \text{ alors } \Phi(\tau) \subset \Phi(\sigma) \end{cases}$$

Alors il existe un morphisme de complexes de groupes abéliens $\phi : \mathrm{C}_*(K) \to \mathrm{C}_*(L)$ vérifiant

$$\phi([A_0, \ldots, A_k]) \in \Phi(\{A_0, \ldots, A_k\})$$

pour tout simplexe orienté $[A_0, \ldots, A_k]$ de K et deux tels morphismes sont homotopes.

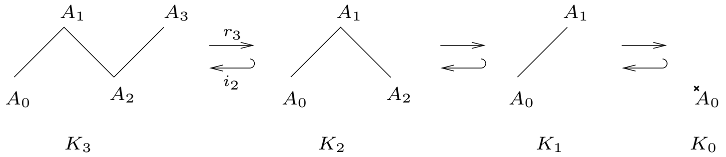
Un morphisme de complexes $\phi : \mathrm{C}_*(K) \to \mathrm{C}_*(L)$ vérifiant $\phi([A_0, \ldots, A_k]) \in \Phi(\{A_0, \ldots, A_k\})$ pour tout simplexe orienté $[A_0, \ldots, A_k]$ est dit **porté par** Φ.

Application au calcul de l'homologie d'un complexe simplicial

Soit L un complexe simplicial et $K \subset L$ un sous-complexe. On dit que K est un **retract** de L s'il existe une application simpliciale $r : L \to K$ telle que la composée de r avec l'inclusion $i : K \hookrightarrow L$ est le morphisme identité de K. On dit que K est un **retract par déformation contiguë de L** s'il existe une application simpliciale $r : L \to K$ vérifiant $r \circ i = \mathrm{id}$ et $i \circ r$ est contiguë à id_L.

Corolaire 3.14 Si $K \subset L$ est un retract par déformation contiguë de L alors l'inclusion $K \to L$ induit un isomorphisme en homologie d'inverse le morphisme induit par la retraction.

Ex. 1) Posons $K_0 = \text{pt}$ et pour $n \geq 1$ notons K_n le complexe simplicial formé des simplexes $\{i, i+1\}$, $0 \leq i < n$ (ligne brisée). Soient i_n l'inclusion $K_n \to K_{n+1}$ et $r_{n+1} : K_{n+1} \to K_n$ l'application simpliciale donnée par $A_{n+1} \mapsto A_n$ et $A_i \mapsto A_i$ si $0 \leq i \leq n$.

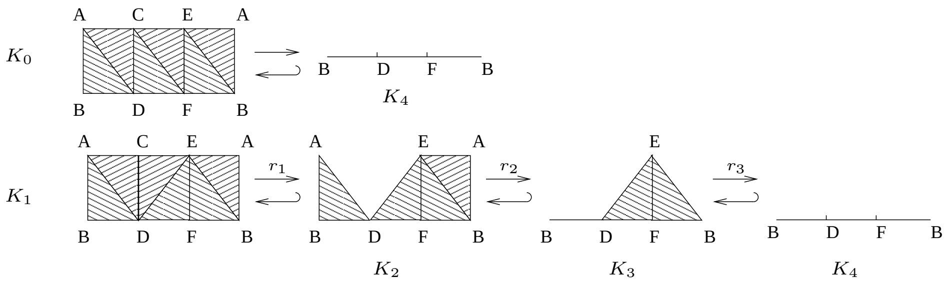


Alors $r_{n+1} i_n = \text{id}_{K_n}$ et $i_n r_{n+1}$ est contiguë à $\text{id}_{K_{n+1}}$ de sorte que K_n est un retract par deformation contiguë de K_{n+1}. On en déduit

$$\text{H}_*(K_n) \simeq \text{H}_*(K_{n-1}) \simeq \cdots \simeq \text{H}_*(K_0) = \text{H}_*(\text{pt}) \ .$$

Observons que K_0 est un retract de K_n mais n'en est pas un retract par déformation contiguë pour $n \geq 2$. Ceci illustre le fait que la relation de contiguïté entre applications simpliciales n'est pas transitive.

2) On considère les deux triangulations K_0 et K_1 du cylindre (figure ci-dessous). r_1 est l'application simpliciale $C \mapsto D$, identité sur les autres sommets. r_2 est l'application simpliciale $A \mapsto B$, identité sur les autres sommets. r_3 est l'application simpliciale $E \mapsto F$, identité sur les autres sommets.



Pour $1 \leq i \leq 3$, les composées $\text{incl} \circ r_i$ sont contiguës à id_{K_i} donc K_{i+1} est un retract par déformation contiguë de K_i. L'inclusion $K_4 \to K_1$ induit donc un isomorphisme en homologie. On reconnaît $K_4 \simeq \partial\triangle[2]$ dont on a calculé l'homologie plus haut.

K_4 est un retract de K_0 mais on ne sait pas passer par déformation contiguë de K_0 à K_4. Tout ce qu'on peut dire est que $\text{H}_*(K_4)$ est un retract de $\text{H}_*(K_0)$, en particulier que $\text{H}_1(K_0)$ n'est pas le groupe nul.