

M2 Math – Topologie Algébrique

(version du 19 janvier 2009)

2. Complexes de groupes abéliens et homologie

Groupes abéliens de type fini

Soit $f : A \rightarrow B$ un morphisme de groupes abéliens (ou homomorphisme). On appelle noyau de f et on note $\ker(f)$ la partie de A formée des éléments a tels que $f(a) = 0$. On appelle image de f et on note $\text{im}(f)$ la partie de B formée des éléments $f(a)$, a décrivant A . Tous deux sont des sous-groupes abéliens de A et de B respectivement.

Soit A' un sous-groupe abélien de A . On appelle quotient de A par A' et on note A/A' l'ensemble des parties de A de la forme $a + A' = \{a + a', a' \in A'\}$, a dérivant A , munie de l'unique structure de groupe telle que la projection $p : A \rightarrow A/A'$, $a \mapsto a + A'$ soit un homomorphisme. Les éléments de A/A' forment une partition de A . La somme de $a + A'$ et de $b + A'$ dans A/A' est $(a + b) + A'$; l'élément neutre est $0 + A' = A'$.

Ex. Les groupes quotients de \mathbb{Z} sont les groupes $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$, n un entier, qu'on notera pour faire court \mathbb{Z}/n .

Lemme 2.1 Soit $f : A \rightarrow B$ un morphisme de groupes abéliens et $A' \subset A$ un sous-groupe abélien de A . Il existe un homomorphisme $g : A/A' \rightarrow B$ tel que f soit la composée $g \circ p$ si et seulement si A' est contenu dans le noyau de f , auquel cas le morphisme g est unique.

Si $A' = \ker(f)$ alors l'homomorphisme g ci-dessus est unique. On l'appelle l'homomorphisme $A/A' \rightarrow B$ induit par f .

Plus généralement soient A un groupe abélien et \sim une relation sur les éléments de A . On forme le sous-groupe B de A engendré par tous les éléments qui s'écrivent $a - a'$ avec $a \sim a'$. Le groupe quotient A/B vérifie la propriété universelle suivante :

Lemme 2.2 Un morphisme de groupes abéliens $f : A \rightarrow C$ s'écrit comme la composée de la projection $A \rightarrow A/B$ avec un morphisme $A/B \rightarrow C$ si et seulement si on a

$$\forall a, a' \in A, a \sim a' \Rightarrow f(a) = f(a')$$

(auquel cas le morphisme $A/B \rightarrow C$ est unique).

Le quotient A/B s'appelle le groupe quotient de A par la relation \sim , le morphisme $A/B \rightarrow C$ s'appelle le morphisme induit par $f : A \rightarrow C$.

Soit S un ensemble fini. On note \mathbb{Z}^S le groupe abélien des applications de S dans \mathbb{Z} . Pour chaque $s \in S$ notons e_s l'application $S \rightarrow \mathbb{Z}$ qui vaut 1 en s et 0 ailleurs. Toute application $f : S \rightarrow \mathbb{Z}$ s'écrit $f = \sum_{s \in S} f(s)e_s$ et cette écriture est unique. On dit que \mathbb{Z}^S est un groupe abélien libre et que la famille $(e_s)_{s \in S}$, qu'on identifie à S , en est une base.

Lemme 2.3 Soit A un groupe abélien et $f : S \rightarrow A$ une application (d'ensembles). Alors f s'étend de façon unique en un homomorphisme $\mathbb{Z}^S \rightarrow A$.

On dit qu'un groupe abélien A est de type fini s'il existe une partie finie S de A qui engendre A , *i.e.* telle que tout élément de A s'écrive comme combinaison linéaire à coefficients entiers d'éléments de S . Il revient au même de dire qu'il existe un ensemble fini S et un homomorphisme surjectif $\mathbb{Z}^S \rightarrow A$.

Soit A un groupe abélien de type fini. Une présentation de A est la donnée d'ensembles finis S et S' , d'un homomorphisme surjectif $f : \mathbb{Z}^S \rightarrow A$ et d'un homomorphisme surjectif de $\mathbb{Z}^{S'}$ dans le noyau de f . Comme conséquence de la proposition suivante, toute groupe abélien de type fini admet une présentation finie :

Prop. 2.4 Soit $n > 0$ un entier et f un homomorphisme de \mathbb{Z}^n dans un groupe abélien A . Alors il existe une famille (e_1, \dots, e_n) d'éléments de \mathbb{Z}^n et des entiers positifs d_1, \dots, d_n tels que d_i divise d_{i+1} pour $1 \leq i < n$, vérifiant :

- (i) la famille (e_i) est une base de \mathbb{Z}^n ;
- (ii) la sous-famille de $(d_i e_i)$ formée des éléments non nuls est une base du noyau de f . (En particulier le noyau de f est un groupe abélien libre de dimension $\leq n$.)

On dit que (e_i) est une base de \mathbb{Z}^n adaptée à $\ker(f)$.

Sommes directes

Soient A un groupe abélien et H, G deux sous-groupes de A . On note $H + G$ le sous-groupe de A formé des sommes d'un élément de H avec un élément de G . Si l'intersection $H \cap G$ ne contient que 0 on dit que la somme de H et de G est directe et on la note.

Soient A et B deux groupes abéliens. On identifie A , respectivement B , avec le sous-groupe de $A \times B$ formé des couples $(a, 0)$, a décrivant A , respectivement $(0, b)$, b décrivant B . Alors la somme de A et de B dans $A \times B$ est directe, on écrira aussi bien $A \oplus B$ pour $A \times B$.

On dispose des inclusions canoniques $A \rightarrow A \oplus B$ et $B \rightarrow A \oplus B$ et des projections $A \oplus B \rightarrow A$, $A \oplus B \rightarrow B$. La donnée d'un homomorphisme d'un groupe abélien C dans $A \oplus B$ équivaut à celle des deux composées $C \rightarrow A \oplus B \rightarrow A$ et $C \rightarrow A \oplus B \rightarrow B$. On décrira un tel homomorphisme par le couple des morphismes associés. La donnée d'un homomorphisme $A \oplus B \rightarrow C$ équivaut à celle des deux restrictions $A \rightarrow A \oplus B \rightarrow C$ et $B \rightarrow A \oplus B \rightarrow C$. On décrira un tel morphisme par le couple des morphismes associés.

Plus généralement un homomorphisme d'une somme directe $A_1 \oplus \dots \oplus A_n$ dans une somme directe $B_1 \oplus \dots \oplus B_m$ se décrit par une matrice à m lignes et n colonnes de morphismes $A_j \rightarrow B_i$. Lorsque les A_j et les B_i sont tous égaux à \mathbb{Z} et en notant k l'homomorphisme 'multiplication par k ', on retrouve la matrice d'un homomorphisme $\mathbb{Z}^n \rightarrow \mathbb{Z}^m$.

Ex. Quels sont les homomorphismes $\mathbb{Z}/4 \oplus \mathbb{Z}/4 \rightarrow \mathbb{Z}/8 \oplus \mathbb{Z}/2$?

Corolaire 2.5 Avec les hypothèses et les conclusions de la proposition 4, f induit un isomorphisme

$$\mathbb{Z}/d_1 \oplus \dots \oplus \mathbb{Z}/d_n \rightarrow \text{Im}(f) .$$

Complexes de groupes abéliens et homologie

Déf. Un **complexe de groupes abéliens** est la donnée d'une suite $(C_n)_{n \geq 0}$ de groupes abéliens et d'une suite $(d_n : C_n \rightarrow C_{n-1})_{n \geq 1}$ d'homomorphismes vérifiant $d_n \circ d_{n+1} = 0$ pour tout entier $n \geq 1$.

On pose $C_{-1} = \{0\}$ et $d_0 =$ le morphisme nul.

L'application $(d_n) : \oplus_n C_n \rightarrow \oplus_n C_{n-1}$ est appelé la **différentielle** du complexe et également noté d . Les éléments du noyau de d_n sont appelés les **cycles** de C_n et on note, ceux de l'image de d_n sont appelés les **bords** de C_{n-1} . Le complexe (C_n, d_n) est aussi noté C_* ou (C_*, d) .

L'**homologie** d'un tel complexe est la suite des groupes abéliens quotient $H_n(C) := \ker(d_n)/\text{im}(d_{n+1})$, $n \geq 0$. On la note $H_*(C)$.

Ex. $\dots \rightarrow \mathbb{Z} \xrightarrow{(\text{id}, \text{id})} \mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z} \xrightarrow{2\text{id}, -2\text{id}} \mathbb{Z} \rightarrow 0$ où le groupe 0 le plus à droite est en degré -1 . L'homologie de ce complexe est 0 en degré 2 et 1, $\mathbb{Z}/2$ en degré 0.

Un morphisme d'un complexe (de groupes abéliens) C_* dans un complexe D_* est une suite d'homomorphismes $f_n : C_n \rightarrow D_n$, $n \geq 0$, telle que les diagrammes

$$\begin{array}{ccc} C_{n+1} & \xrightarrow{f_{n+1}} & D_{n+1} \\ \downarrow d_{n+1} & & \downarrow d_{n+1} \\ C_n & \xrightarrow{f_n} & D_n \end{array}$$

commutent pour tout $n \geq 0$, *i.e.* telle que $d_{n+1} \circ f_{n+1} = f_n \circ d_{n+1}$ pour tout $n \geq 0$.

Une telle suite de morphismes transforme les cycles, respectivement bords, de C_n en cycles, respectivement bords, de D_n donc induit une suite de morphismes $H_n(C) \rightarrow H_n(D)$, $n \geq 0$: pour chaque entier n la composée $\ker(d_n : C_n \rightarrow C_{n-1}) \xrightarrow{f_n} \ker(d_n : D_n \rightarrow D_{n-1}) \rightarrow H_n(D)$ est nulle sur $\text{im}(d_{n+1} : C_{n+1} \rightarrow C_n)$ donc se factorise via $H_n(C)$.