

M2 Math – Topologie Algébrique

Cours 1 – Homologie des complexes simpliciaux¹

(version du 14 janvier 2009)

1. Complexes simpliciaux finis

Rappel de géométrie affine sur \mathbb{R}

Soient A_0, \dots, A_n $n + 1$ points de \mathbb{R}^N (n et N sont deux entiers quelconques). Le plus petit sous-espace affine de \mathbb{R}^N contenant tous les A_i est l'ensemble des barycentres $\sum_i \lambda_i A_i$, $(\lambda_i)_{0 \leq i \leq n}$ décrivant les $n + 1$ -uplets de réels de somme 1. On le note $\langle A_0, \dots, A_n \rangle$. Les points A_0, \dots, A_n sont affinement indépendants si tout point de $\langle A_0, \dots, A_n \rangle$ s'écrit $\sum_i \lambda_i A_i$ pour un unique $n + 1$ -uplets de réels (λ_i) de somme 1. De façon équivalente A_0, \dots, A_n sont affinement indépendants si et seulement si le sous-espace affine $\langle A_0, \dots, A_n \rangle$ est de dimension n .

Une partie \mathcal{C} de \mathbb{R}^N est convexe si pour tout couple de points A, B de \mathcal{C} le segment $[A, B]$ est dans \mathcal{C} . L'ensemble

$$\{\sum_{i=0}^n \lambda_i A_i \mid \lambda_i \geq 0, \sum_i \lambda_i = 1\}$$

est la plus petite partie convexe de \mathbb{R}^N contenant tous les A_i . On la note $C(A_0, \dots, A_n)$ et on l'appelle l'enveloppe convexe des A_i . C'est une partie fermée et bornée de \mathbb{R}^N donc un espace topologique compact pour la topologie induite par celle de \mathbb{R}^N .

Un coin d'une partie convexe \mathcal{C} est un point A de \mathcal{C} vérifiant

$$\forall B, C \in \mathcal{C}, A \in [B, C] \Rightarrow (A = B \text{ ou } A = C).$$

Lemme 1.1 Si les points A_i sont affinement indépendants alors les coins de $C(A_0, \dots, A_n)$ sont exactement les points A_i .

Ex. Qu'en est il si les A_i ne sont pas affinement indépendants ?

Lemme 1.2 Soit $f : \{A_0, \dots, A_n\} \rightarrow \mathbb{R}^{N'}$ une application. Si les points A_0, \dots, A_n sont affinement indépendants alors f s'étend de façon unique en une application affine $\tilde{f} : C(A_0, \dots, A_n) \rightarrow \mathbb{R}^{N'}$ d'image l'enveloppe convexe des $f(A_i)$.

L'application \tilde{f} vérifie $\tilde{f}(\sum_{i=0}^n \lambda_i A_i) = \sum_{i=0}^n \lambda_i f(A_i)$ et cette formule définit \tilde{f} si l'écriture $\sum_{i=0}^n \lambda_i A_i$ est unique.

Ex. Montrer par un exemple que l'hypothèse "les A_i sont affinement indépendants" est nécessaire.

Complexe simplicial dans \mathbb{R}^N

Déf. On appelle **simplexe** dans \mathbb{R}^N l'enveloppe convexe d'un ensemble fini non vide $\{A_0, \dots, A_n\}$ de points affinement indépendants dans \mathbb{R}^N .

L'entier $n = \dim(\langle A_0, \dots, A_n \rangle)$ est appelé **dimension** du simplexe $C(A_0, \dots, A_n)$.

Les points A_0, \dots, A_n sont déterminés (à permutation près) par le simplexe $C(A_0, \dots, A_n)$ puisque ce sont les coins du simplexe ; on les appelle les **sommets** du simplexe.

On appelle **face** d'un simplexe σ tout simplexe dans \mathbb{R}^N dont les sommets sont des sommets de σ . Les faces de σ sont donc exactement les enveloppes convexes de sous-ensembles de l'ensemble des sommets de σ .

Déf. On appelle **complexe simplicial** (fini) dans \mathbb{R}^N un ensemble fini K de simplexes de \mathbb{R}^N vérifiant :

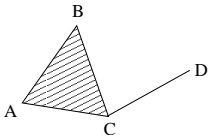
- toute face d'un simplexe de K est un simplexe de K ;
- l'intersection de deux simplexes de K est vide ou une face de chacun des simplexes.

On appelle **sommet** d'un complexe simplicial K tout sommet d'un simplexe de K .

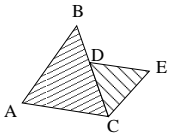
Ex. 1) L'ensemble des faces d'un simplexe dans \mathbb{R}^N est un complexe simplicial.

¹F.X. Dehon, 9 décembre 2008, dehon@unice.fr

2) L'ensemble formé du simplexe $C(A, B, C)$, du simplexe $C(C, D)$ et de leurs faces (figure ci-dessous) est un complexe simplicial dans \mathbb{R}^2 .



3) L'ensemble formé des simplexes $C(A, B, C)$, $C(D, C, E)$ et de leurs faces (figure ci-dessous) n'est pas un complexe simplicial dans \mathbb{R}^2 : les simplexes $C(B, C)$ et $C(D, C)$ ne s'intersectent pas suivant une face de $C(B, C)$.



Déf. Un **sous - complexe simplicial** d'un complexe simplicial K dans \mathbb{R}^N est un sous-ensemble K' de K qui est lui-même un complexe simplicial dans \mathbb{R}^N . Il suffit pour cela que toute face d'un élément de K' soit elle-même dans K' .

Morphismes entre complexes simpliciaux

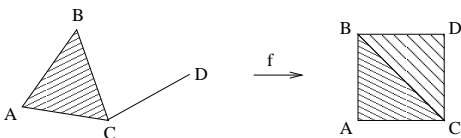
Déf. Un **morphisme** d'un complexe simplicial K de \mathbb{R}^N dans un complexe simplicial L de $\mathbb{R}^{N'}$ est une application f de l'ensemble des sommets de K dans l'ensemble des sommets de L vérifiant :

(Q) Pour tout simplexe σ de K , les images par f des sommets de σ sont des sommets d'un même simplexe τ de L .

On ne demande pas que f soit injective.

On observe que l'application identité de l'ensemble des sommets d'un complexe simplicial K dans lui-même vérifie la condition (Q) et que si $f : K \rightarrow L$ et $g : L \rightarrow M$ sont des morphismes de complexes simpliciaux alors l'application composée $g \circ f$ de l'ensemble des sommets de K dans l'ensemble des sommets de M vérifie (Q). On dispose donc d'une composition des morphismes entre complexes simpliciaux et du morphisme identité. Un morphisme $f : K \rightarrow L$ est un **isomorphisme** de complexes simpliciaux s'il existe $g : L \rightarrow K$ tel que $f \circ g$ et $g \circ f$ soient l'identité de L et l'identité de K respectivement.

Ex. K est formé des simplexes $C(A, B, C)$, $C(C, D)$ et de leurs faces. L est formé des simplexes $C(A, B, C)$, $C(B, C, D)$ et de leurs faces (figure ci-dessous).



L'application $f : A \mapsto A, B \mapsto B, C \mapsto C, D \mapsto D$ est un morphisme de complexes simpliciaux bijectif sur l'ensemble des sommets mais f n'est pas un isomorphisme. Quels sont les morphismes de L dans K ?

Soit $f : K \rightarrow L$ un morphisme entre complexes simpliciaux. A tout simplexe σ de K , de sommets A_0, \dots, A_n , on associe le simplexe $C(f(A_0), \dots, f(A_n))$ de L qu'on note $f(\sigma)$. On note $f(K)$ l'ensemble formé par les $f(\sigma)$, σ décrivant K .

Prop. 1.3 L'ensemble $f(K)$ est un sous-complexe simplicial de L .

Exercice. Pourquoi $C(f(A_0), \dots, f(A_n))$ est-il un simplexe ? Démontrer la proposition.

Espace topologique sous-jacent à un complexe simplicial

Déf. Soit K un complexe simplicial fini dans \mathbb{R}^N . La réunion des simplexes de K munie de la topologie induite par celle de \mathbb{R}^N est une partie compacte de \mathbb{R}^N (c'est une partie fermée et bornée). On l'appelle l'**espace topologique sous-jacent** à K et on la note $|K|$.

Ex. Soit A un point de \mathbb{R}^N . Le complexe simplicial K associé au simplexe $C(A)$ a un seul simplexe et un seul sommet. L'espace topologique sous-jacent est formé du seul point A . On dit (par abus de langage) que ce complexe simplicial est un point.

Soit $f : K \rightarrow L$ un morphisme entre complexes simpliciaux. D'après le lemme 2, pour chaque simplexe σ de K la restriction de f à l'ensemble des sommets de σ s'étend de façon unique en une application affine de σ dans $f(\sigma)$. Si σ et σ' sont deux simplexes de K , les applications affines ainsi définies sur σ et σ' coïncident sur $\sigma \cap \sigma'$. On obtient donc une application bien définie de $|K|$ dans $|L|$ qu'on note $|f|$. L'application $|f|$ est affine par morceaux ("PL-map" dans les textes anglais). On observe que la restriction de $|f|$ à l'ensemble des sommets de K est égale à f donc $|f|$ détermine f .

Lemme 1.4 L'application $|f|$ est continue.

Prop. 1.5 On a les égalités $|\text{Id}_K| = \text{Id}_{|K|}$ et $|g \circ f| = |g| \circ |f|$ pour $f : K \rightarrow L$ et $g : L \rightarrow M$ des morphismes entre complexes simpliciaux. En particulier si f est un isomorphisme de complexes simpliciaux alors $|f|$ est un **homéomorphisme** (une bijection continue dont la réciproque est continue).

Complexe simplicial abstrait

Ce qui suit a pour but de montrer que les complexes simpliciaux et leurs morphismes sont des données essentiellement combinatoires. Malheureusement ce qu'on gagne en clarté est perdu en abstraction.

Déf. Un **complexe simplicial (fini) abstrait** est un ensemble (fini) K d'ensembles finis non vides vérifiant : pour tout élément A de K et pour toute partie non vide $B \subset A$, B est un élément de K .

Un élément de K s'appelle un simplexe de K . La dimension d'un simplexe $A \in K$ est le nombre d'éléments de A moins 1. Les éléments des simplexes de K sont appelés les sommets de K . L'ensemble des sommets de K est donc la réunion ensembliste des simplexes de K . Une partie B d'un simplexe A de K s'appelle une face de K .

Ex. Soit $n \geq 0$ un entier. L'ensemble des parties non vide de $\{0, \dots, n\}$ est un complexe simplicial qu'on appelle **simplexe standart de dimension n** et qu'on note $\Delta[n]$.

Déf. Un sous-complexe simplicial abstrait de K est une partie K' de K qui est elle même un complexe simplicial abstrait.

Un morphisme d'un complexe simplicial abstrait K dans un complexe simplicial abstrait L est une application de l'ensemble des sommets de K dans l'ensemble des sommets de L vérifiant : $\forall \sigma \in K, f(\sigma) \in L$.

Ex. 1) Soit S une partie finie non vide de cardinal $n + 1$. L'ensemble, disons K , des parties non vides de S est un complexe simplicial. Toute bijection $\{0, \dots, n\} \rightarrow S$ définit un isomorphisme du simplexe standart $\Delta[n]$ dans K .

2) Le simplexe standart de dimension 0 a un seul sommet ; on l'appelle aussi **le point** et on le note pt. Soit K un complexe simplicial ; l'unique application de l'ensemble des sommets de K dans le singleton $\{0\}$ définit l'unique morphisme de complexes simpliciaux $K \rightarrow \text{pt}$. Nous utiliserons cette application par la suite.

Réalisation

Soit K un complexe simplicial (fini) dans \mathbb{R}^N . A chaque simplexe σ de K on associe l'ensemble S_σ des sommets de σ . L'ensemble des S_σ , σ décrivant les simplexes de K , est un complexe simplicial (fini) abstrait qu'on note **K**.

Dans le sens inverse soit K un complexe simplicial (fini) abstrait et soit S l'ensemble de ses sommets. On considère l'espace vectoriel \mathbb{R}^S des applications de S dans \mathbb{R} . Si s est un élément de S on note e_s l'application $S \rightarrow \mathbb{R}$ qui vaut 1 en s et 0 ailleurs. La famille $(e_s)_{s \in S}$ est une base de \mathbb{R}^S . On identifie S avec la partie de \mathbb{R}^S formée des e_s , s décrivant S . A chaque simplexe σ de K on associe l'enveloppe convexe $C(\sigma)$ des sommets de σ dans \mathbb{R}^S . L'ensemble des $C(\sigma)$, σ décrivant les simplexes de K , est un complexe simplicial dans \mathbb{R}^S qu'on appelle la **réalisation** de K dans \mathbb{R}^S et qu'on note **K**.

On observe que si K est un complexe simplicial fini dans \mathbb{R}^N d'ensemble de sommets S alors la réalisation dans \mathbb{R}^S du complexe simplicial abstrait **K** est canoniquement isomorphe à K . De même si K est un complexe simplicial abstrait (fini) d'ensemble de sommets S alors le complexe simplicial abstrait sous-jacent à **K** est canoniquement isomorphe à K . (En formule $K \simeq \underline{\underline{K}}$.)

Ex. Soit $\sigma = C(A_0, \dots, A_n)$ un simplexe dans \mathbb{R}^N et soit K le complexe simplicial formé de l'ensemble des faces de σ (y compris σ). Alors le complexe simplicial abstrait sous-jacent à K est isomorphe au simplexe standart de dimension n ($\Delta[n]$).

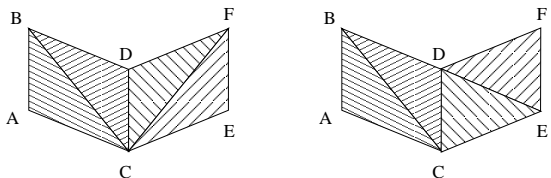
Les définitions sont telles que pour tout couple K, L de complexes simpliciaux abstraits on a une bijection canonique entre l'ensemble des morphismes de K dans L et l'ensemble des morphismes de la réalisation de K dans celle de L .

A un complexe simplicial abstrait K on associe l'espace topologique $|\overline{K}|$ qu'on note encore $|K|$. Il est clair qu'un morphisme $K \rightarrow L$ induit une application continue $|K| \rightarrow |L|$.

Triangulation d'un espace topologique

Déf. Soit X une partie de \mathbb{R}^N . Une triangulation à isomorphisme affine près de X (**triangulation PL**) est un complexe simplicial fini K (abstrait ou dans \mathbb{R}^N) et une bijection $f : |K| \rightarrow X$ tels que pour chaque simplexe $\sigma \in K$ la restriction de f à $|\sigma|$ est affine. Une partie de \mathbb{R}^N admettant une triangulation PL est appelée polytope. Par définition même l'espace topologique sous-jacent à un complexe simplicial est un polytope.

Ex. Considérons les deux triangulations PL suivantes K et L du même polytope formé de deux rectangles pleins non coplanaires s'intersectant suivant un côté commun.



Les deux triangulations PL sont minimales. Les complexes simpliciaux K et L ne sont pas isomorphes bien que les polytopes sous-jacents soient les mêmes.

Déf. Soit X un espace topologique. Une **triangulation à homéomorphisme près** de X est un complexe simplicial fini K (abstrait ou dans \mathbb{R}^N) et un homéomorphisme $|K| \rightarrow X$.

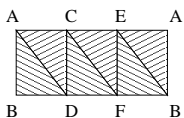
Il n'est pas vrai que tout espace topologique compact est triangulable (à homéomorphisme près). Parmi les triangulations d'un espace topologique triangulable, on peut considérer celles dont le nombre de simplexes est minimal, qu'on appellera triangulation minimale. Idem pour les triangulations PL d'un polytope.

Ex. 1) Soient A, B, C trois points non alignés de \mathbb{R}^2 . Considérons le complexe simplicial K formé des segments $C(A, B)$, $C(B, C)$, $C(A, C)$ et de leurs faces. L'espace topologique sous-jacent à K est homéomorphe au cercle S^1 de sorte qu'on obtient une triangulation de S^1 .

Exercice : Expliciter un tel homéomorphisme. Montrer que la triangulation obtenue est minimale.

2) Plus généralement considérons le complexe simplicial, noté $\partial\Delta[n]$, formé des faces du simplexe standard $\Delta[n]$ de dimension strictement inférieure à n . Alors $|\partial\Delta[n]|$ est homéomorphe à la sphère S^n .

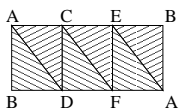
3) Considérons le complexe simplicial abstrait représenté ci-dessous



$K = \{\{A, B, D\}, \{A, C, D\}, \{C, D, F\}, \{C, E, F\}, \{E, F, B\}, \{E, A, B\}$ et les faces de ces simplexes}.

L'espace topologique sous-jacent à K est homéomorphe au cylindre $S^1 \times [0, 1]$ et la triangulation ainsi obtenue est minimale.

4) Le complexe simplicial représenté ci-dessous est-il une triangulation du ruban de Moebius ?



Quelques questions non élémentaires

1. Un espace topologique triangulable est compact et admet une stratification par des espaces homéomorphes à des parties convexes de \mathbb{R}^n . La réciproque est-elle vraie ?

2. Soit K un complexe simplicial abstrait (fini). Quel est le plus petit entier N tel que K se réalise dans \mathbb{R}^N (i.e. soit isomorphe au complexe simplicial abstrait sous-jacent à un complexe simplicial dans \mathbb{R}^N) ?

Ce qui précède montre que N est inférieur ou égal au nombre de sommets de K moins 1. D'autre part N est supérieur ou égal au maximum des dimensions des simplexes de K .