CAPES externe de Mathématiques
session 1997
deuxième composition

Enoncé

http://perso.wanadoo.fr/megamaths

[0] [ag42e]

OBJET ET NOTATIONS DU PROBLÈME

Le plan affine euclidien orienté est rapporté à un repère orthonormé direct $(O\,;\vec{u},\vec{v})$. Un point du plan sera repéré soit par ses coordonnées (x, y) dans ce repère, soit par son affixe $x + iy$. La norme euclidienne d'un vecteur $\vec{V}$ sera notée $\|\vec{V}\|$. La droite passant par deux points distincts M et N sera notée (M,N).

On rappelle qu'une droite coupe une hyperbole en au plus deux points et que la tangente en un point M de cette hyperbole est la limite des sécantes (M,M′) lorsque M′ tend vers M en restant sur l'hyperbole. On admettra qu'une conique quelconque coupe une hyperbole en au plus quatre points ou est confondue avec elle.

On réservera le nom de triangle aux triangles non dégénérés, c'est-à-dire dont les trois sommets sont distincts et non alignés. Un tel triangle sera dit inscrit dans une courbe si ses trois sommets appartiennent à la courbe.

L'objet du problème est l'étude de quelques propriétés des triangles inscrits dans une hyperbole équilatère.

I. TRIANGLE INSCRIT DANS UNE HYPERBOLE ÉQUILATÈRE ET DONT UN CÔTÉ PASSE PAR LE CENTRE DE L'HYPERBOLE

I.1. Dans cette question, P désigne un point fixé du plan, différent de l'origine, Q le symétrique de P par rapport à l'origine O et M un point du plan différent des points P et Q.

I.1.1. Montrer que les bissectrices des droites (M,P) et (M,Q) sont parallèles aux axes de coordonnées si et seulement si

$$(\vec{u},\overrightarrow{MP}) + (\vec{u},\overrightarrow{MQ}) = 0 \qquad [\pi]\,.$$

I.1.2. On note (x, y) les coordonnées de M et (a, b) les coordonnées du point P. Montrer que

$$\sin\left((\vec{u},\overrightarrow{MP}) + (\vec{u},\overrightarrow{MQ})\right) = \frac{2\,(xy - ab)}{\|\overrightarrow{MP}\|\,\|\overrightarrow{MQ}\|}\,.$$

I.1.3. En déduire le lieu des points M du plan tels que les bissectrices des droites (M,P) et (M,Q) soient parallèles aux axes de coordonnées.

I.2. Soit $\mathcal{H}$ une hyperbole équilatère de centre O, soit P un point de $\mathcal{H}$ et soit $\mathcal{D}$ une droite passant par P.

I.2.1. On suppose que $\mathcal{D}$ coupe $\mathcal{H}$ en deux points distincts P et P′ et on note I le milieu du segment [P,P′]. Montrer que les bissectrices des droites (I,O) et (P,P′) sont parallèles aux asymptotes de $\mathcal{H}$. [On pourra introduire le symétrique Q de P par rapport à O et utiliser le résultat du I.1.3.]

I.2.2. On suppose que $\mathcal{D}$ est la tangente $\mathcal{T}_P$ à $\mathcal{H}$ au point P. Montrer que les bissectrices des droites (P,O) et $\mathcal{T}_P$ sont parallèles aux asymptotes de $\mathcal{H}$.

I.3. Soit (A,B,C) un triangle inscrit dans $\mathcal{H}$. Montrer que les bissectrices de l'angle en A de ce triangle sont parallèles aux asymptotes de $\mathcal{H}$ si et seulement si B et C sont symétriques par rapport à O.

I.4. Soit (A,B,C) un triangle inscrit dans $\mathcal{H}$, tel que B et C soient symétriques par rapport à O. Montrer que le cercle circonscrit au triangle recoupe $\mathcal{H}$ en le point diamétralement opposé à A.

II. TRIANGLE ÉQUILATÉRAL INSCRIT DANS UNE HYPERBOLE ÉQUILATÈRE

Dans cette partie, $\mathcal{H}$ désigne une hyperbole équilatère ayant les axes de coordonnées pour asymptotes.

II.1. Soit Ω un point de $\mathcal{H}$ d'affixe $\omega = a + ib$ et soit $\mathcal{S}$ le cercle centré en Ω et passant par le point Ω' symétrique de Ω par rapport à O.

II.1.1. Montrer que $\mathcal{H}$ est l'ensemble des points dont l'affixe $z = x + iy$ est telle que $z^2 - \omega^2$ soit réel.

II.1.2. Montrer que les affixes des points de l'intersection de $\mathcal{H}$ et de $\mathcal{S}$ sont les racines de l'équation :

$$(z + \omega)\left[(z - \omega)^3 - 8\omega\overline{\omega}^2\right] = 0.$$

II.1.3. En déduire qu'en général le cercle $\mathcal{S}$ coupe l'hyperbole $\mathcal{H}$ en quatre points distincts A, B, C, Ω' et que les points A, B, C sont les sommets d'un triangle équilatéral.
Quand ce résultat est-il en défaut ? Décrire alors la configuration.

II.2. Soit (A,B,C) un triangle équilatéral inscrit dans $\mathcal{H}$ et soit Ω le centre du cercle circonscrit à ce triangle. On note α, β, γ, ω les affixes des points A, B, C, Ω.

II.2.1. Montrer qu'il existe un nombre complexe ρ tel que α, β, γ soient les racines de l'équation :

$$(z - \omega)^3 = \rho^3.$$

En déduire la relation :

$$\alpha^2 + \beta^2 + \gamma^2 = 3\omega^2.$$

II.2.2. Montrer que le centre du cercle circonscrit au triangle (A,B,C) appartient à l'hyperbole $\mathcal{H}$.

II.2.3. Déterminer une équation du troisième degré ayant les nombres $\alpha^2 - \omega^2$, $\beta^2 - \omega^2$, $\gamma^2 - \omega^2$ pour racines.
En déduire que les nombres $\omega\rho^3$ et $(8\omega^3 + \rho^3)\,\rho^3$ sont réels.

II.2.4. Montrer que $\rho^3 = 8\omega\overline{\omega}^2$. En déduire que le cercle circonscrit au triangle (A,B,C) passe par le symétrique du point Ω par rapport à l'origine.

III. ORTHOCENTRE D'UN TRIANGLE INSCRIT DANS UNE HYPERBOLE ÉQUILATÈRE

Dans cette partie, $\mathcal{H}$ désigne l'hyperbole équilatère d'équation $xy = k$, avec $k > 0$, et (A,B,C) un triangle quelconque inscrit dans $\mathcal{H}$. On notera a, b et c les abscisses respectives des points A, B et C.

III.1. Soit $\mathcal{D}_A$ la hauteur issue de A du triangle (A,B,C).

III.1.1. Écrire une équation de $\mathcal{D}_A$ et déterminer les coordonnées des points d'intersection de $\mathcal{D}_A$ avec l'hyperbole $\mathcal{H}$. En déduire que l'orthocentre D du triangle appartient à l'hyperbole.

III.1.2. Montrer que D est confondu avec A si et seulement si la hauteur $\mathcal{D}_A$ est tangente à l'hyperbole.

III.1.3. Montrer que si deux hyperboles équilatères distinctes se coupent en quatre points distincts, alors chacun de ces points est l'orthocentre du triangle formé par les trois autres points.

III.1.4. Décrire l'intersection de deux hyperboles équilatères distinctes, tangentes en un point et se coupant en deux autres points distincts.

Tournez la page S.V.P.

III.2. Soit $\mathcal{S}$ le cercle d'équation $x^2 + y^2 - 2r\,x - 2s\,y + t = 0$.

III.2.1. Écrire une équation du quatrième degré donnant les abscisses des points d'intersection de l'hyperbole $\mathcal{H}$ et du cercle $\mathcal{S}$.
Quel est le produit des racines (réelles ou complexes) de cette équation ?

III.2.2. Montrer que si $\mathcal{S}$ est le cercle circonscrit au triangle (A,B,C), alors ce cercle passe par D′, symétrique de l'orthocentre du triangle par rapport à l'origine O.

III.2.3. En déduire une nouvelle démonstration des résultats des questions II.1.3., II.2.2. et II.2.4.

III.3. On suppose que le triangle (A,B,C) n'est pas rectangle. On note D son orthocentre et $\mathcal{C}$ une conique passant par les points A, B, C et D.

III.3.1. Montrer que $\mathcal{C}$ n'est pas un couple de deux droites parallèles aux axes et que, si $\mathcal{C}$ est une hyperbole équilatère d'asymptotes parallèles aux axes, on a $\mathcal{C} = \mathcal{H}$.

III.3.2. Soit E un point du plan, non situé sur $\mathcal{H}$. Montrer qu'il existe soit une unique hyperbole équilatère, soit un unique couple de deux droites perpendiculaires, passant par les quatre points A, B, C et E. Montrer que, dans les deux cas, cette conique passe aussi par D.

III.3.3. Déduire de ce qui précède que $\mathcal{C}$ est soit une hyperbole équilatère, soit un couple de deux droites perpendiculaires.

III.3.4. Montrer que le centre de $\mathcal{C}$ est cocyclique avec les milieux des côtés du triangle (A,B,C). [On pourra utiliser I.2.1.]

IV. UNE CONSTRUCTION GÉOMÉTRIQUE

Dans cette partie, on considère la configuration du III.2., c'est-à-dire un triangle (A,B,C) inscrit dans l'hyperbole équilatère $\mathcal{H}$, le cercle $\mathcal{S}$, de centre Ω, circonscrit à ce triangle, l'orthocentre D du triangle et le point D′, symétrique de D par rapport à l'origine (on rappelle que D′ appartient à $\mathcal{S}$). On notera respectivement $\mathcal{T}_A$ et $\mathcal{N}_A$ la tangente et la normale en A à l'hyperbole $\mathcal{H}$. Dans les questions IV.2. et IV.3., la position limite d'un point M (resp. d'une droite $\mathcal{D}$) sera encore notée M (resp. $\mathcal{D}$).

IV.1. Montrer que l'isobarycentre G des points A, B, C et D′ est le milieu du segment [O,Ω].

IV.2. Les points A et B restant fixes, on fait tendre le point C vers le point A, en restant sur l'hyperbole $\mathcal{H}$.

IV.2.1. Quelles sont les positions limites de la droite (A,C) et de la hauteur $\mathcal{D}_A$ issue de A ?

IV.2.2. Quelles sont les positions limites des points D, D′, G et Ω ? Caractériser la position limite du cercle $\mathcal{S}$.

IV.3. Le point A restant fixe, on fait, dans la configuration du IV.2., tendre B vers A, en restant sur l'hyperbole $\mathcal{H}$.

IV.3.1. Quelles sont les positions limites de la droite $\mathcal{D}_A$ et des points D, D′, G et Ω ? Caractériser la position limite du cercle $\mathcal{S}$.

IV.3.2. Montrer que les droites (A,O) et (A,D′) (avec (A,D′) = $\mathcal{T}_A$ si D′ = A) sont perpendiculaires.

IV.3.3. Donner une construction géométrique simple du centre de courbure en un point d'une hyperbole équilatère.