

TD 1 — Révisions (ou pas) — 17-24 mars 25

Version du 24 mars 2025 - F-X. Dehon

Donnez une justification raisonnable de chacune de vos réponses en utilisant le plus souvent l'algèbre linéaire de L1. Illustrez par un dessin.

Ex.1.1. Vecteurs et parallélogramme — Soient A, B, C, D quatre points de \mathbb{R}^2 . Discuter des équivalences entre les conditions suivantes :

- (i) La droite (AB) est parallèle à la droite (CD) et la droite (AC) est parallèle à la droite (BD) .
- (ii) $\vec{AB} = \vec{CD}$
- (iii) $\vec{AC} = \vec{BD}$
- (iv) Les segments $[AD]$ et $[BC]$ ont même milieu.
- ★(v) $AB = CD$ et $AC = BD$ (AB désigne la distance usuelle entre A et B).

Voir les ex.1.6 et 3.2 pour la condition (v).

Ex.1.2. Soient $\mathcal{D}, \mathcal{D}', \mathcal{D}''$ trois droites parallèles distinctes et Δ une droite non parallèle à \mathcal{D} . Montrer que Δ coupe les droites $\mathcal{D}, \mathcal{D}', \mathcal{D}''$ en des points M, M', M'' et que le rapport $\frac{MM'}{MM''}$ ne dépend pas de Δ .

Comment s'appelle ce résultat ?

Ex.1.4. Triangle rectangle — Soient A, B, C trois points distincts. Montrer l'équivalence entre

- (i) ABC est un triangle rectangle en A .
- (ii) $AB^2 + AC^2 = BC^2$
- (iii) Le triangle (ABC) est inscrit dans le cercle de diamètre BC

Connaissez vous des triangles rectangle dont les longueurs des côtés sont des nombres entiers ?

Ex.1.5. Points remarquables d'un triangle

- a. Les médianes d'un triangle (droites passant par un sommet et le milieu du côté opposé) sont elles concourantes ? Si oui que peut on dire du point d'intersection ?
- b. Mêmes questions avec les médiatrices puis avec les hauteurs.
- c. Montrer que les points d'intersection des médianes, des médiatrices et des hauteurs sont alignés.

Ex.1.6 Intersection de deux cercles dans \mathbb{R}^2

- a. Dessiner sur une feuille avec un repère orthonormé les cercles \mathcal{C} et \mathcal{C}' de rayon 1 et de centre $O(0, 0)$ et $O'(1, 0)$ respectivement. Quelles sont approximativement d'après le dessin les coordonnées des points d'intersection de \mathcal{C} avec \mathcal{C}' ? Quelles sont les coordonnées exactes des points d'intersection exprimées avec des radicaux ?
- b. A quelle condition sur $r, r' > 0$ et la distance OO' les cercles $\mathcal{C}(O, r)$ et $\mathcal{C}(O', r')$ dans \mathbb{R}^2 ont ils exactement deux points d'intersection ?
- c. Soit $z_0 \in \mathbb{C}$ et $r > 0$. Quelle équation polynomiale en z, \bar{z} doit satisfaire $z \in \mathbb{C}$ pour qu'il soit sur le cercle de centre z_0 et de rayon r (dans \mathbb{R}^2 identifié à \mathbb{C}) ?

Réécrire le système d'équations indiquant que z est à l'intersection de $\mathcal{C}(z_0, r_0)$ avec $\mathcal{C}(z_1, r_1)$ comme une équation polynomiale en z, \bar{z} à coefficient dans \mathbb{C} de degré 1 et une équation polynomiale en z à coefficient dans \mathbb{C} de degré 2.

En déduire la forme des solutions exprimées avec des radicaux. (On écrira $\pm\sqrt{z}$ faute de pouvoir distinguer de façon cohérente les deux racines carré d'un nombre complexe z .)

Ex.1.7. Cf. [\[Perrin Quelques exercices de géométrie, ex.2.3\]](#) — Soit $ABCD$ un carré de centre E . Soit F le milieu de $[DE]$ et G celui de $[AB]$. Que peut-on dire du triangle CFG ?

2. Géométrie affine et euclidienne dans \mathbb{R}^n

Ex.2.1. Intersection de sous-espaces affines — Soit \mathcal{P} le plan de \mathbb{R}^3 d'équation $x + y + z = 1$ et \mathcal{D} la droite de \mathbb{R}^3 passant par les points $A = (-1, 1, 2)$ et $B = (1, 1, -1)$.

- a. Quel est le point de \mathbb{R}^3 intersection de \mathcal{D} avec \mathcal{P} ?
- b. Quelle est l'équation du plan passant par A et parallèle à \mathcal{P} ?
- c. A quoi ressemble l'équation d'un plan passant par A et B ?

Que peut on dire de l'intersection d'un tel plan avec \mathcal{P} ?

- d. Déterminer un système d'équations de \mathcal{D} .

Ex.2.2. Distances entre un point et un sous-espace affine — Soient $A = (-1, 0, 1) \in \mathbb{R}^3$, \mathcal{P} le plan de \mathbb{R}^3 d'équation $x - 2y + 3z = 1$, \mathcal{P}' le plan d'équation $2x - y + z = 1$ et \mathcal{D} la droite intersection de \mathcal{P} avec \mathcal{P}' .

a. Déterminer la distance de A à \mathcal{P} , c'est à dire le minimum des distances de A à un point de \mathcal{P} .

Méthode : déterminer le projeté orthogonal de A sur \mathcal{P}

b. Déterminer λ tel que $(2x - y + z - 1) + \lambda(x - 2y + 3z - 1)$ soit l'équation d'un plan passant par \mathcal{D} et orthogonal à \mathcal{P} . En déduire avec Pythagore la distance de A à \mathcal{D} .

c. Déterminer μ tel que $(2x - y + z - 1) + \mu(x - 2y + 3z - 1)$ soit l'équation d'un plan passant par \mathcal{D} et A .

Choisissez un repère orthonormé de ce plan ayant A pour origine (*Choisir d'abord une base de la direction de ce plan puis Gram-Schmidt*) puis déterminer une équation de \mathcal{D} dans ce repère orthonormé. Quelle distance de A à \mathcal{D} en déduit on ?

Ex.2.3. Distance entre deux droites — Soient $A = (-1, 1, 2)$, $B = (1, 1, -1)$, $C = (2, -1, -3)$ et $D = (2, 2, 1)$.

a. Les droites (AB) et (CD) s'intersectent elles ?

b. Observer que si G et H sont des points de (AB) et (CD) respectivement tels que \vec{GH} est orthogonal à \vec{AB} et à \vec{CD} alors GH réalise le minimum de la distance entre un point de (AB) et un point de (CD)

c. Calculer ce minimum. (*Plusieurs méthodes possibles !*)

Ex.2.4. Soient \mathcal{F} et \mathcal{G} deux sous-espaces affines non vide de \mathbb{R}^n de direction F et G respectivement. Quelles relations d'implication a-t-on entre les énoncés suivants :

- (i) L'intersection de \mathcal{F} avec \mathcal{G} est non vide.
- (ii) L'intersection de \mathcal{F} avec \mathcal{G} est vide ou un point.
- (iii) $F + G = \mathbb{R}^n$
- (iv) $F \cap G = \{0\}$

Ex.2.5. Médiatrice — Soient A, B deux points distincts de \mathbb{R}^n . Montrer l'équivalence entre

- (i) $MA = MB$ (pour la distance usuelle dans \mathbb{R}^n)
- (ii) M appartient au sous-espace affine de direction l'orthogonal de $\text{Vect}(\vec{AB})$ (pour le produit scalaire usuel de \mathbb{R}^n) passant par le milieu du segment $[AB]$.

Ex.2.6. Bac série E Limoge 1971 — Déterminer les équations des plans de \mathbb{R}^3 passant par la droite d'équation $\frac{x-2}{3} = \frac{y+1}{2} = z$ et tangents à la sphère d'équation $x^2 + y^2 + z^2 - z - \frac{11}{64} = 0$. (*Un plan est tangent à une sphère si leur intersection est réduite à un point.*)

3. Constructions à la règle et au compas

Partant d'un ensemble de points on peut :

- Tracer le cercle issu d'un des points et passant par un autre point.
- Tracer la droite passant par deux des points.
- Ajouter à la liste des points les points d'intersection de deux cercles tracés ou d'un cercle et d'une droite tracés.

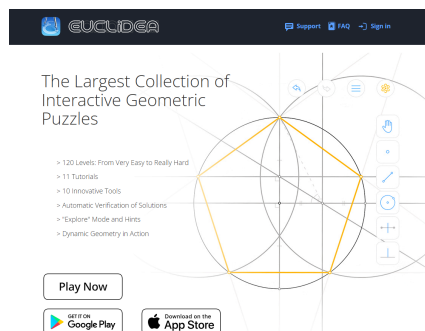
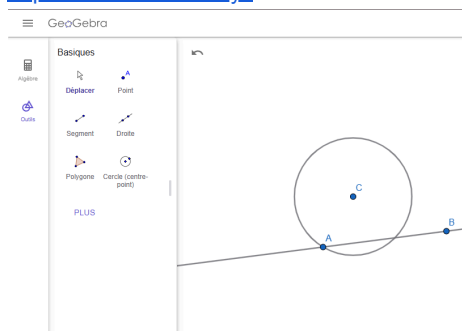
On testera les constructions avec Geogebra^[1]. Les propriétés des points construits ne changent pas lorsqu'on déforme la figure en déplaçant les points initiaux. Voir aussi le jeu Euclidea^[2].

Ex.3.1. Partant de deux points distincts A et B , construire à la règle et au compas le milieu du segment $[AB]$.

Ex.3.2. Partant de trois points non alignés A, B, C , construire à la règle et au compas le point D tel que $\vec{AB} = \vec{CD}$. En combien d'étapes obtenez vous ce point ?

1. <https://www.geogebra.org/geometry>

2. <https://www.euclidea.xyz>



TD2 - 7 avril 25

- Ex.0.1. a.** Soient $\mathcal{D}, \mathcal{D}'$ deux droites non parallèles d'un plan affine dans \mathbb{R}^n . Montrer que l'intersection $\mathcal{D} \cap \mathcal{D}'$ est un point.
b. Soient $\mathcal{P}, \mathcal{P}'$ deux plans affines non parallèles de \mathbb{R}^3 . Montrer que l'intersection $\mathcal{P} \cap \mathcal{P}'$ est une droite de \mathbb{R}^3 .

Ex.0.2. Interprétation euclidienne de l'équation d'un hyperplan — On munit \mathbb{R}^n du produit scalaire usuel. Soit $\mathcal{H} \subset \mathbb{R}^n$ d'équation $a_1x_1 + \dots + a_nx_n = b$, les a_i n'étant pas tous nuls. Notons $O = (0, \dots, 0)$ et $n = (a_1, \dots, a_n)$.

Observer que $\frac{b}{\|n\|^2}n$ est le projeté orthogonal de O sur \mathcal{H} , que la distance de O à \mathcal{H} est $d = \frac{|b|}{\|n\|}$, que \mathcal{H} se décrit comme $\{x \in \mathbb{R}^n, (n|x) = (n|\frac{b}{\|n\|^2}n)\}$.

Que deviennent ces égalités si on choisit n de norme 1 et $b \geq 0$ (quitte à changer l'équation de \mathcal{H} en son opposé) ?

Barycentres et applications affines

Ex.1.1. Barycentres — **a.** Soient A, B deux points distincts de \mathbb{R}^n . Montrer que la droite (AB) est l'ensemble $\{\lambda A + (1 - \lambda)B, \lambda \in \mathbb{R}\}$.

Quel sous-ensemble obtient on lorsqu'on restreint les λ au segment $[0, 1]$? à $[1, +\infty[$? à $]-\infty, 0]$?

b. Soient A_1, \dots, A_p des points de \mathbb{R}^n . Observer $\sum_i \lambda_i A_i = \lambda_1 A_1 + (1 - \lambda_1) \sum_{i \geq 2} \frac{\lambda_i}{1 - \lambda_1} A_i$ pourvu $\lambda_1 \neq 1$.
En déduire que l'isobarycentre des A_i est aligné avec A_1 et l'isobarycentre des $A_i, i \geq 2$.

En déduire que les médianes d'un triangle sont concourantes.

c. Quel est le sous-ensemble de \mathbb{R}^n $\{\sum_i \lambda_i A_i, \lambda_i \in \mathbb{R} \text{ et } \sum_i \lambda_i = 1\}$?

Quel sous-ensemble obtient on lorsqu'on restreint les λ_i à \mathbb{R}_+ ?

Montrer qu'un sous-ensemble \mathcal{E} de \mathbb{R}^n est un sous-espace affine si et seulement si $\forall A, B \in \mathcal{E}, (AB) \subset \mathcal{E}$

d. Soient A, B, C trois points non alignés de \mathbb{R}^2 . Quel est la partie de \mathbb{R}^2 $\{\alpha A + \beta B + \gamma C, \alpha + \beta + \gamma = 1 \text{ et } \alpha, \beta \leq 0\}$? Faites un dessin.

Ex.1.2. Le théorème de Ceva (1678) — Soient A, B, C trois points non alignés de \mathbb{R}^2 , A', B', C' des points sur les droites $(BC), (AC), (AB)$ respectivement.

a. Montrer l'équivalence entre les conditions :

(i) Les droites $(AA'), (BB'), (CC')$ sont parallèles ou concourantes

(ii) $\frac{A'B}{A'C} \cdot \frac{B'C}{B'A} \cdot \frac{C'A}{C'B} = -1$

b. On suppose que $(B'C')$ est parallèle à (BC) . Montrer que l'intersection de (BB') avec (CC') est aligné avec les milieux des segments $[B'C']$ et $[BC]$.

c. Alternative, cf ex.6 — : Montrer qu'il existe une unique bijection affine f transformant A, B, C en A, C, B respectivement. Quel est l'expression de f en coordonnées barycentrique relativement à la base affine (A, B, C) ?

Montrer que l'ensemble des points fixes $\{M, f(M) = M\}$ est exactement la médiane du triangle ABC issue de A .

Sous l'hypothèse $(B'C')$ est parallèle à (BC) , montrer que le milieu de $[B'C']$ et l'intersection de (BB') avec (CC') sont fixés par f .

Ex.1.3. Projection centrale — Soient O, A, B trois points non alignés, A' , respectivement B' , un point de la droite (OA) distinct de O , respectivement de la droite (OB) et distinct de O .

On considère l'application $f : (AB) \rightarrow (A'B')$ qui associe à M l'intersection de (OM) avec $(A'B')$.

a. L'application f est elle définie sur : (AB) entier ? Est elle surjective ?

b. Quelle est l'expression de f en coordonnées barycentriques relativement à la base affine (A, B) de (AB) et (A', B') de $(A'B')$? (On pourra introduire les coordonnées barycentriques de A' et B' relativement à la base affine (O, A, B) .)

A quelles conditions sur A, B, A', B' l'application f est elle affine ?

c. Le prolongement naturel de f au plan (OAB) privé de $\{O\}$ est il une application affine ? Quelle est son expression relativement aux bases affines (O, A, B) du plan et (A', B') de $(A'B')$.

c. Reprendre les questions précédentes en remplaçant $(AB), (A'B')$ droites de \mathbb{R}^2 par $(ABC), (A'B'C')$ plans de \mathbb{R}^3 . L'application ainsi obtenue respecte t'elle l'alignement ?

Applications affines et points fixes

Ex.2.1 Montrer que la composée de deux applications affines est une application affine dont la partie linéaire est la composée des parties linéaires.

Ex.2.2 Points fixes — Soient \mathcal{E} un sous-espace affine de \mathbb{R}^n de direction E et $f : \mathcal{E} \rightarrow \mathcal{E}$ une application affine de partie linéaire φ .

a. Montrer que l'ensemble des points fixes $\{M \in \mathcal{E}, f(M) = M\}$ est un sous-espace affine de \mathcal{E} vide ou de direction l'espace propre E_1 de φ .

b. Montrer que si 1 n'est pas valeur propre de φ alors f admet exactement un point fixe.

c. Cas général : montrer que f s'écrit comme la composée d'une translation de \mathcal{E} et d'une application affine dont l'espace des points fixes est non vide de direction E_1 .

Que peut on dire de l'ensemble $\{u \in E, t_u \circ f \text{ admet un point fixe}\}$?

d. Exemple : Soit \mathcal{E} le plan de \mathbb{R}^3 d'équation $x + y + z = 1$ et $f : \mathcal{E} \rightarrow \mathcal{E}, (x, y, z) \mapsto (x + y, y + 1, -x - 2y)$. Quels sont les $u \in E$ tels que $t_u \circ f$ admette un point fixe ? Pour un tel u , quel est l'espace des points fixes de $t_u \circ f$?

Ex.2.3 Homothéties - translations — Soient \mathcal{E} un sous-espace affine de \mathbb{R}^n de direction E et h une application affine $\mathcal{E} \rightarrow \mathcal{E}$ dont la partie linéaire est λid_E pour un $\lambda \in \mathbb{R}$.

a. On suppose $\lambda \neq 1$. Montrer que h admet exactement un point fixe O . Comment se décrit l'image d'un point M par h ? On dit que h est l'homothétie de centre O de rapport λ .

b. On suppose $\lambda = 1$. Que peut on dire de h ?

c. Soit $f : \mathcal{E} \rightarrow \mathcal{E}$ une application affine. Montrer l'équivalence entre les conditions suivantes :

- (i) L'image par f d'une droite affine \mathcal{D} de \mathcal{E} est une droite (et non un point) parallèle à \mathcal{D} .
- (ii) f est une homothétie ou une translation.

d. Montrer que l'ensemble formé des homothéties affines et des translations est un groupe pour la composition des applications.

Isométries et constructions

Partant d'un ensemble de points \mathcal{P} , on lui ajoute les points d'intersection des droites passant par deux points distincts de \mathcal{P} (construction à la règle), des cercles de centre un point de \mathcal{P} passant par un autre point de \mathcal{P} (construction au compas), des droites et cercles issus de points de \mathcal{P} (construction à la règle et au compas).

Ex.3.1 Symétries, translations au compas seul.

a. Etant donné trois points distincts A, B, C construire le symétrique orthogonal de C par rapport à la droite (AB) .

b. En s'aidant des symétries axiales par rapport à (BC) et par rapport à la médiatrice de (BC) , construire le symétrique de A par rapport au milieu de $[BC]$. En déduire une construction au compas seul du point $C + \vec{AB}$ (le translaté de C de vecteur \vec{AB}).

Ex.3.2 Homothéties — On se donne trois points A, B, M en position générale.

a. Construire à la règle et au compas à partir des points A, M l'image de M par l'homothétie h de centre A de rapport $\frac{2}{3}$.

b. Construire à la règle et au compas le centre de l'homothétie égale à la composée de la translation de vecteur \vec{AB} avec l'homothétie h (i.e. $h \circ t_{\vec{AB}}$).

Ex.3.3 Rotations

a. Soient $A \neq B, C \neq D$ quatre points du plan. En position générale la composée r des symétries axiales $s_{(CD)} \circ s_{(AB)}$ est une rotation "d'angle le double de l'angle orienté $\widehat{\vec{AB}, \vec{CD}}$ ". Quel est son centre ?

b. Soient A', B', C', D' quatre autres points en position générale auxquels on associe la rotation r' . La composée $r' \circ r$ est en général une rotation "d'angle la somme des angles de r et r' ".

Construire à la règle et au compas à partir des huit points A, B, \dots, D' le centre de $r' \circ r$. Dans quelles situations la construction n'aboutit elle pas ?

TD3 - 21 avril 25

Ex.0. Soit f une application d'ensembles $\mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ qui préserve les distances (pour la distance usuelle de \mathbb{R}^n). On note $\text{Fix}(f)$ l'ensemble des points fixes de f . Pour H un hyperplan affine de \mathbb{R}^n on note s_H la symétrie orthogonale par rapport à H .

- Soit M un point tel que $f(M) \neq M$. Montrer que l'hyperplan médiateur du segment $[M f(M)]$ contient $\text{Fix}(f)$ et que $\text{Fix}(s_H \circ f)$ contient $\text{Fix}(f) \cup \{M\}$.
- On suppose que $\text{Fix}(f)$ contient $n + 1$ points affinement indépendants. Montrer que f est l'identité.
- Montrer qu'il existe une famille finie d'hyperplans affines H_1, \dots, H_k telle que la composée $s_{H_k} \circ \dots \circ s_{H_1} \circ f$ soit l'identité. En déduire que f est une application affine.

Calcul littéral dans le plan complexe

Ex.1.1. On identifie \mathbb{C} à \mathbb{R}^2 muni de son produit scalaire usuel. \bar{z} et $|z| = \sqrt{z\bar{z}}$ désignent le conjugué et le module d'un nombre complexe z .

a. Comment s'écrit le produit scalaire de deux nombres complexes z et z' en terme de z, \bar{z}, z', \bar{z}' ? Comment s'écrit la distance entre z et z' ?

b. Montrer que les applications $\mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$ qui sont affines lorsqu'on identifie \mathbb{C} à \mathbb{R}^2 sont exactement les applications de la forme $f : z \mapsto az + b\bar{z} + c$ avec $a, b, c \in \mathbb{C}$ fixés. Quelle est la partie linéaire d'une tel f ?

Montrer qu'un tel f est une isométrie si et seulement si $|a| = 1$ et $b = 0$ ou bien si $a = 0$ et $|b| = 1$. Quelle est alors l'expression de l'isométrie réciproque f^{-1} ?

Montrer qu'un tel f est injectif et préserve les rapports de distance si et seulement si $a \neq 0$ et $b = 0$ ou si $a = 0$ et $b \neq 0$. (Observer que la composée de f avec une homothétie convenablement choisie est une isométrie.) On dira qu'un tel f est une similitude, directe si $b = 0$, indirecte sinon.

Quels sont les points fixes de $z \mapsto az + b$ selon a, b ? Et de $z \mapsto a\bar{z} + b$?

c. Observer que $s : z \mapsto \bar{z}$ est la symétrie orthogonale d'axe $\mathbb{R} \subset \mathbb{C}$.

Quelle est l'expression de la composée $j \circ s \circ j^{-1}$ (le conjugué de s par j) pour $j : z \mapsto az + b$ puis pour $j : z \mapsto a\bar{z} + b$? Observer que c'est la symétrie orthogonale d'axe $j(\mathbb{R})$. Obtient on ainsi toutes les symétries axiales?

A quelle condition sur j a-t-on $j \circ s \circ j^{-1} = s$?

d. Observer que $r_\theta : z \mapsto e^{i\theta}z$ est la rotation de centre 0 d'angle θ .

Quelle est l'expression de $j \circ r_\theta \circ j^{-1}$ pour j comme en (c)? Observer que c'est une rotation de centre $j(0)$ d'angle $\pm\theta$.

A quelle condition sur j a-t-on $j \circ r_\theta \circ j^{-1} = r_\theta$? En déduire que l'ensemble des rotations affines de même centre z_0 forment un groupe commutatif isomorphe à $S^1 = \{z \in \mathbb{C}, |z| = 1\}$.

e. Quelle est l'expression de la symétrie centrale de centre z_0 ?

Quelle est l'expression de la composée de deux symétries centrales (pas forcément de même centre)? Et de trois symétries centrales? Et de n symétries centrales?

f. Quelle est l'expression de la composée de deux symétries axiales? (On peut utiliser la question (c) pour l'expression d'une symétrie axiale). Et de la composée d'une symétrie axiale avec une rotation?

Montrer que toute rotation de centre z_0 d'angle θ s'écrit comme la composée de deux symétries axiales. Lesquelles conviennent?

Ex.1.2. Triangles équilatéraux — Un triangle ABC est équilatéral si les longueurs de ses côtés sont égales. On note j le nombre $\frac{1}{2}(-1 + i\sqrt{3})$.

a. Montrer que j est racine de $X^3 - 1$ et que les autres racines sont $j^2 = \bar{j}$ et $j^3 = 1$. Pourquoi dit on que la multiplication par j est la rotation vectorielle d'angle $\frac{\pi}{3}$?

En déduire que le triangle de sommets $1, j, j^2$ est équilatéral et inscrit dans le cercle unité.

b. Soient $z_0 \neq z_1 \in \mathbb{C}$. Montrer qu'il existe exactement une similitude directe $z \mapsto az + b$ et une similitude indirecte $z \mapsto a\bar{z} + b$ transformant $1, j$ en z_0, z_1 respectivement.

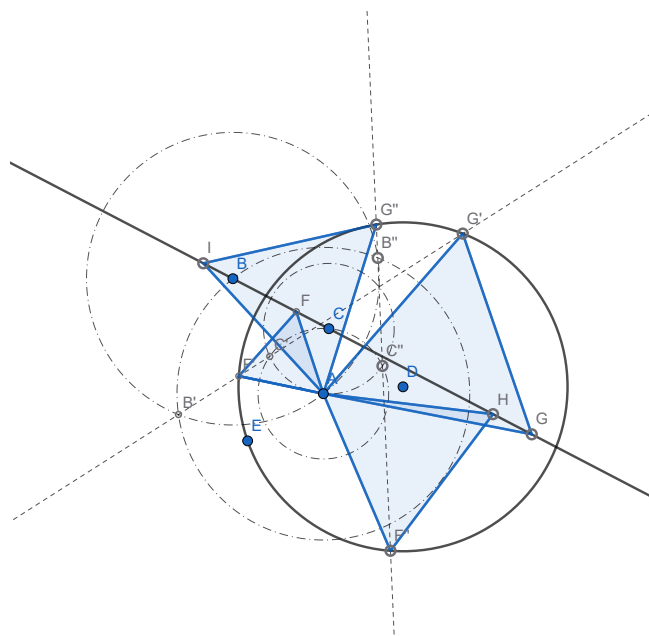
En déduire que si z_0, z_1, z_2 sont les sommets d'un triangle équilatéral alors il existe exactement une similitude transformant $1, j, j^2$ en z_0, z_1, z_2 .

En déduire que z_0, z_1, z_2 sont les sommets d'un triangle équilatéral si et seulement si $\frac{z_2 - z_0}{z_1 - z_0} = j$ ou j^2 , autrement dit si z_2 est l'image de z_1 par l'une des deux rotations de centre z_0 et de partie linéaire $z \mapsto jz$ ou $z \mapsto j^2z$.

c. Soient A, B deux points distincts du plan \mathbb{R}^2 . Comment peut-on construire au compas seul l'image de B par la rotation de centre A d'angle $\pm \frac{\pi}{3}$?

On fixe A, B, C, D, E en position général. On veut construire à la règle et au compas les points M sur la droite (BC) et N sur le cercle de centre D passant par E tels que AMN soit équilatéral.

Observer que N est à l'intersection du cercle $\mathcal{C}(D, E)$ avec l'image de la droite (BC) par l'une des rotations de centre A d'angle $\pm \frac{\pi}{3}$. En déduire une construction de M et N . Combien y a-t-il de solutions en positions générales ? (Faites l'expérience dans Geogebra).



Ex.1.3. Triangles semblables et constructions

a. Soient z_0, z_1, z_2 trois nombres complexes distincts. Observer l'égalité

$\frac{z_2 - z_0}{z_1 - z_0} \cdot \frac{z_1 - z_2}{z_0 - z_2} \cdot \frac{z_0 - z_1}{z_2 - z_1} = -1$. Comment cela s'interprète-t-il en terme de somme des angles (non orientés) d'un triangle ?

b. Montrer que deux triangles isocèles sont image l'un de l'autre par une similitude $z \mapsto az + b$ ou $z \mapsto a\bar{z} + b$ si et seulement si leurs angles au sommet sont les mêmes.

c. Soient $n \geq 1$ un entier et A, B, C, D quatre points du plan \mathbb{R}^2 vérifiant $AB = BC = n, AC = CD = 1$ et $D \in [AB]$. Montrer que D est le barycentre $(1 - \frac{1}{n})A + \frac{1}{n}B$.

d. Déduire de ce qui précède une construction au compas seul du barycentre $(1 - \frac{1}{n})A + \frac{1}{n}B$ partant des points A, B (utilisez l'exercice 3.1.a de la feuille 2 pour la construction de l'intersection d'un cercle avec la droite (AB) .)

Variables, calcul et raisonnement en géométrie

F-X. Dehon — 20 mai 25

- [Variables, formules](#)
- [Représentation, paramétrisation d'un objet](#)
- [Exemple de raisonnement et calcul 1 — propriété du parallélogramme](#)
- [Exemple de raisonnement et calcul 2 — la droite d'Euler](#)

Variables, formules

Les **Variables** (inconnues ou paramètres d'un problème) sont de type point (M , élément de \mathbb{R}^n) ou vecteur (u , élément de \mathbb{R}^n) ou scalaire (a , nombre réel) ou ensemble (\mathcal{F} , partie de \mathbb{R}^n) ou fonction ($f : \mathcal{E} \rightarrow \mathcal{F}$).

Les variables interviennent dans des **formules**, lesquelles désignent un nombre ou un point ou un vecteur ou une partie d'un espace affine ou famille de tels objets, ou un énoncé (une propriété dont la valeur est vrai ou faux, comme l'égalité entre deux objets pour commencer).

Les formules se prêtent au **calcul littéral** (= suite de réécritures de formules suivant les règles de calcul) et au **raisonnement**. Calcul littéral et raisonnement peuvent coïncider comme lors d'une suite d'équivalences d'énoncés, chacun se déduisant du précédent (voir l'exemple 1 plus bas).

Exemples de formule : $\vec{AB} = B - A$, $\vec{AB} \perp \vec{CD}$, $(\vec{AB} | \vec{CD}) = 0$, $\|\vec{AB}\|^2$, AB , $\frac{1}{2}A + \frac{1}{2}B$, $\mathcal{D} = \{M, MA = MB\}$, $M \in \mathcal{D}$, $A + u$, $A = (x, y)$, $[AB] = \{\lambda A + (1 - \lambda)B, 0 \leq \lambda \leq 1\}$, $h_{O,\lambda}(A)$ (l'image de A par l'homothétie de centre O de rapport λ).

Représentation, paramétrisation d'un objet

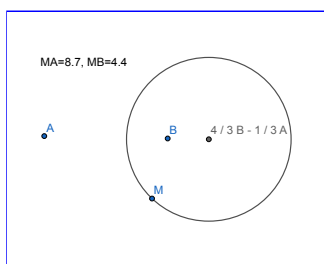
Un objet déterminé par une formule dont les variables décrivent des ensembles explicites est dit **paramétré** par ces variables. Lorsque les variables sont assujetties à des équations non résolues, on parlera de **paramétrisation implicite**.

Représentation : *pas de définition de ce terme pour l'instant.*

Les calculs sont facilités par le choix d'une représentation ou d'une paramétrisation des objets adaptée aux hypothèses et à l'objectif poursuivi. Par défaut les points sont représentés et paramétrés par leur nom (c'est tautologique) soumis aux hypothèses de l'énoncé. Dans un repère adapté les points seront paramétrés par leurs coordonnées. Le repère sera d'autant mieux adapté qu'il y aura moins de paramètres et que certaines hypothèses seront intégrées à la nature du repère.

Exemples :

- Une droite de \mathbb{R}^2 peut être représentée par deux de ses points A, B (on écrit (AB)) ou un point A et un vecteur directeur u (autrement dit un repère (A, u)), ou par une équation $ax + by + c = 0$.
Les points d'une telle droite peuvent être paramétrés implicitement par un couple (x, y) avec $(x, y) \in \mathbb{R}^2$ tq $(ax + by + c = 0)$ ou explicitement comme $tA + (1 - t)B$ de paramètre $t \in \mathbb{R}$ (combinaison barycentrique de A et B).
Les droites elles-mêmes comme objet variable peuvent être paramétrées par leur représentation : le couple de points (A, B) , le triplet de nombres (a, b, c) , etc.
- $AM, M \in \mathbb{R}^2$ tq $AM = 2BM$ est une paramétrisation implicite du nombre AM par les points M, A, B ;
 $AM, M \in \mathcal{C}(\frac{4}{3}B - \frac{1}{3}A, \frac{2}{3}AB)$ est une paramétrisation explicite du nombre AM par M, A, B (où $\mathcal{C}(\frac{4}{3}B - \frac{1}{3}A, \frac{2}{3}AB)$ désigne ici le cercle centré en $\frac{4}{3}B - \frac{1}{3}A$ de rayon $\frac{2}{3}AB$).

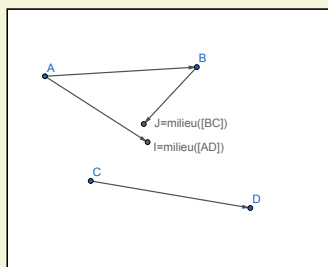


Exemple de raisonnement et calcul 1 — propriété du parallélogramme

On veut prouver l'énoncé suivant :

Soient A, B, C, D quatre points de \mathbb{R}^2 ; alors $\vec{AB} = \vec{CD} \Leftrightarrow [AD]$ et $[BC]$ ont même milieu.

▼ Details



\vec{AB} est défini comme l'élément $u \in \mathbb{R}^2$ tel que $B = A + u$, selon la définition d'un sous-espace affine de \mathbb{R}^n . Cinq approches pour cette preuve :

1. Démonstration en coordonnées dans \mathbb{R}^2 : $A = (a_1, a_2), \dots$ On a $\vec{AB} = (b_1 - a_1, b_2 - a_2)$, milieu($[AD]$) = $(\frac{1}{2}(a_1 + d_1), \frac{1}{2}(a_2 + d_2))$, etc. Alors :

$$\begin{aligned} \vec{AB} = \vec{CD} &\Leftrightarrow b_1 - a_1 = d_1 - c_1 \text{ et } b_2 - a_2 = d_2 - c_2 \\ &\Leftrightarrow a_1 + d_1 = b_1 + c_1 \text{ et } a_2 + d_2 = b_2 + c_2 \\ &\Leftrightarrow \text{milieu}([AD]) = \text{milieu}([BC]). \end{aligned}$$

2. On a pas besoin de distinguer abscisse et ordonnée dans la preuve ci-dessus. Même approche mais plus intrinsèque : On a dans \mathbb{R}^2 (et plus généralement dans tout espace vectoriel) $\vec{AB} = B - A$, milieu($[AD]$) = $\frac{1}{2}A + \frac{1}{2}D$, etc. Alors :

$$\vec{AB} = \vec{CD} \Leftrightarrow B - A = D - C \Leftrightarrow B + C = A + D \Leftrightarrow \frac{1}{2}(B + C) = \frac{1}{2}(A + D) \Leftrightarrow \text{milieu}([AD]) = \text{milieu}([BC])$$

3. Relations de Chasles sur les bipoints représentant des vecteurs :

$$\text{On a milieu}([AD]) = A + \frac{1}{2}\vec{AD}, \text{ milieu}([BC]) = B + \frac{1}{2}\vec{BC} = A + \vec{AB} + \frac{1}{2}\vec{BC}.$$

$$\begin{aligned} \text{milieu}([AD]) = \text{milieu}([BC]) &\Leftrightarrow A + \frac{1}{2}\vec{AD} = A + \vec{AB} + \frac{1}{2}\vec{BC} \\ &\Leftrightarrow \frac{1}{2}\vec{AD} = \vec{AB} + \frac{1}{2}\vec{BC} \\ &\Leftrightarrow \underbrace{\vec{AD}}_{\vec{AC} + \vec{CD}} = \vec{AB} + \underbrace{\vec{AB} + \vec{BC}}_{\vec{AC}} \\ &\Leftrightarrow \vec{CD} = \vec{AB} \end{aligned}$$

4. Chasles encore : On introduit I milieu de $[AD]$ et J milieu de $[BC]$. I et J sont caractérisés (implicitement !) par les égalités $\vec{AI} = \vec{ID}$ et $\vec{BJ} = \vec{JC}$. Alors :

$$\begin{aligned} \vec{AB} = \vec{CD} &\Leftrightarrow \vec{AI} + \vec{IB} = \vec{CJ} + \vec{JD} \\ &\Leftrightarrow \vec{ID} + \vec{IB} = -\vec{BJ} + \vec{JD} \\ &\Leftrightarrow \vec{BJ} + \vec{IB} = \vec{JD} - \vec{ID} \\ &\Leftrightarrow \vec{IJ} = \vec{JI} \Leftrightarrow I = J \end{aligned}$$

5. Dans le repère (A, \vec{AB}, \vec{AC}) sous l'hypothèse A, B, C non alignés (l'unicité des coordonnées dans le repère joue un rôle dans ce qui suit) :

Notons (x, y) les coordonnées de D . Le milieu de $[AD]$ est de coordonnées $(\frac{x}{2}, \frac{y}{2})$, celui de $[BC]$ est de coordonnées $(\frac{1}{2}, \frac{1}{2})$, alors :

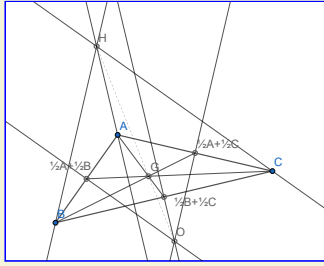
$$\begin{aligned} \vec{AB} = \vec{CD} &\Leftrightarrow (x, y) = (1, 1) \\ \text{milieu}([AD]) = \text{milieu}([BC]) &\Leftrightarrow (\frac{x}{2}, \frac{y}{2}) = (\frac{1}{2}, \frac{1}{2}) \end{aligned}$$

Exemple de raisonnement et calcul 2 — la droite d'Euler

On veut prouver de façon élémentaire (et aveugle) :

Dans un triangle $ABC \subset \mathbb{R}^2$ les médianes sont concourantes, tout comme les médiatrices et les hauteurs ; les trois points d'intersection sont alignés.

▼ Details



- Les données (paramètres) du problème sont $A, B, C \in \mathbb{R}^2$ en position général. Les inconnues sont $G, O, H \in \mathbb{R}^2$ satisfaisant les conditions d'intersection.

- Traduction proposée :

$$\begin{cases} |G - A, \frac{1}{2}B + \frac{1}{2}C - A| = 0 \\ |G - B, \frac{1}{2}A + \frac{1}{2}C - B| = 0 \\ |G - C, \frac{1}{2}A + \frac{1}{2}B - C| = 0 \\ (O - \frac{1}{2}A - \frac{1}{2}B | B - A) = 0 \\ (O - \frac{1}{2}A - \frac{1}{2}C | C - A) = 0 \\ (O - \frac{1}{2}B - \frac{1}{2}C | C - B) = 0 \\ (H - A | B - C) = 0 \\ (H - B | A - C) = 0 \\ (H - C | B - A) = 0 \end{cases}$$

où $|u, v| = u_1v_2 - u_2v_1$ (déterminant relativement à la base canonique de \mathbb{R}^2) et $(u|v) = u_1v_1 + u_2v_2$ (produit scalaire usuel) pour $u = (u_1, u_2)$ et $v = (v_1, v_2) \in \mathbb{R}^2$.

Il s'agit de montrer que si A, B, C sont non alignés alors ce système (linéaire avec second membre) admet une (unique) solution (G, O, H) et que G, O, H sont alignés ($\Leftrightarrow |O - G, H - G| = 0$).

- En utilisant la [anti-] symétrie et la bilinéarité des formes $(u, v) \mapsto |u, v|$ et $(u, v) \mapsto (u|v)$, le système s'écrit avec les six formes $M \mapsto |M, P|$ et $M \mapsto (M|P)$, $P = A, B, C$.
- Paramétrage en coordonnées barycentrique : sous l'hypothèse A, B, C non alignés, tout point $M \in \mathbb{R}^2$ s'écrit de manière unique $m_A A + m_B B + m_C C$ avec $m_A, m_B, m_C \in \mathbb{R}$ vérifiant $m_A + m_B + m_C = 1$, ou de façon équivalente $m_A A + m_B B + (1 - m_A - m_B)C$ (on rompt la symétrie en A, B, C). Les inconnues deviennent $g_A, g_B, g_C, o_A, \dots, h_C \in \mathbb{R}$.

En utilisant la [anti-] symétrie et la bilinéarité des formes $(u, v) \mapsto |u, v|$ et $(u, v) \mapsto (u|v)$, les paramètres du système d'équations deviennent $|A, B|, (A|B)$, etc. Par exemple la première équation s'écrit :

$$|g_A A + g_B B + g_C C - A, \frac{1}{2}B + \frac{1}{2}C - A| = 0.$$

$$g_A(\frac{1}{2}|A, B| + \frac{1}{2}|A, C|) + g_B(\frac{1}{2}|B, C| - |B, A|) + g_C(-\frac{1}{2}|B, C| + |A, C|)$$

- Simplification : Les paramètres $|A, B|, |A, C|, |B, C|, (A|B), (A|C), (B|C)$ sont liés car les points A, B, C sont linéairement liés dans \mathbb{R}^2 (même s'ils sont affinement indépendants). En traduisant dans \mathbb{R}^2 le triangle par $-A$ on se ramène à $A = (0, 0)$ dans \mathbb{R}^2 (on rompt ainsi également la symétrie) ; il ne reste alors comme paramètres que $|B, C| \in \mathbb{R}^\times$ (0 est exclus car \vec{AB}, \vec{AC} sont supposés linéairement indépendants), $(B|B) > 0$ (car $B \neq A$), $(C|C) > 0$ (idem) enfin $(B|C) \in \mathbb{R}$ quelconque. La première équation devient $\frac{1}{2}|B, C|(b_G - c_G) = 0$ d'où on déduirait $b_G = c_G$.

- Résolution : Notons les paramètres dans l'ordre d, b_2, c_2, p . Le système devient :

$$\begin{cases} g_A + g_B + g_C = 1 \\ \frac{1}{2}d(g_B - g_C) = 0 \\ d(\frac{1}{2}(g_B - 1) + g_C) = 0 \\ d(\frac{1}{2}(g_C - 1) + g_B) = 0 \\ o_A + o_B + o_C = 1 \\ (o_B - \frac{1}{2})b_2 + o_C p = 0 \\ o_B p + (o_C - \frac{1}{2})c_2 = 0 \\ (o_B - \frac{1}{2})(p - b_2) + (o_C - \frac{1}{2})(c_2 - p) = 0 \\ h_A + h_B + h_C = 1 \\ h_B(b_2 - p) + h_C(p - c_2) = 0 \\ (h_B - 1)p + h_C c_2 = 0 \\ h_B b_2 + (h_C - 1)p = 0 \end{cases}$$

et on veut montrer $|O - G, H - G| = 0$ soit

$$d((o_B - g_B)(h_C - g_C) - (o_C - g_C)(h_B - g_B)) = 0 \Leftrightarrow (g_B, g_C), (o_B, o_C), (h_B, h_C) \text{ sont alignés dans } \mathbb{R}^2.$$

Les quatre premières lignes donnent $g_A = g_B = g_C = \frac{1}{3}$.

On observe que la ligne 8 est la différence de la ligne 7 avec la ligne 6.

Les lignes 6 et 7 s'écrivent matriciellement $\begin{pmatrix} b_2 & p \\ p & c_2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} o_B \\ o_C \end{pmatrix} = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} b_2 \\ c_2 \end{pmatrix}$. Le déterminant de ce sous-système est $b_2 c_2 - p^2$; on reconnaît l'inégalité de Cauchy-Schwartz. Le terme est strictement positif car \vec{AB} et \vec{AC} sont non colinéaires par hypothèse. Le sous-système a donc une et une seule solution, d'où o_B, o_C puis o_A par la ligne 5.

La ligne 10 est la différence de la ligne 12 avec la ligne 11. Ces deux dernières s'écrivent $\begin{pmatrix} b_2 & p \\ p & c_2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} h_B \\ h_C \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} p \\ p \end{pmatrix}$. Même matrice $\sim h_B, h_C$ puis h_A avec la ligne 9.

Les vecteurs $\begin{pmatrix} o_B - \frac{1}{3} \\ o_C - \frac{1}{3} \end{pmatrix}$ et $\begin{pmatrix} h_B - \frac{1}{3} \\ h_C - \frac{1}{3} \end{pmatrix}$ sont liés si et seulement si leurs images par $\begin{pmatrix} b_2 & p \\ p & c_2 \end{pmatrix}$ sont liés, c'est à dire si $\begin{pmatrix} b_2/2 - \frac{1}{3}b_2 - \frac{1}{3}p \\ c_2/2 - \frac{1}{3}p - \frac{1}{3}c_2 \end{pmatrix}$ et $\begin{pmatrix} p - \frac{1}{3}b_2 - \frac{1}{3}p \\ p - \frac{1}{3}p - \frac{1}{3}c_2 \end{pmatrix}$ sont liés, or le second est formellement le double du premier.

Calcul littéral dans \mathbb{C}

F-X. Dehon — 29 avr - 7 mai 25

Voir aussi le commentaire de [TD du 29 avril gp3](#) *Le calcul littéral dans \mathbb{C} est il toujours accessible ?*

0. Préparation : maîtrise du calcul littéral dans \mathbb{C} proprement dit

- *Définitions* — On peut voir \mathbb{C} comme l'espace vectoriel \mathbb{R}^2 muni de la multiplication $(a, b) \cdot (c, d) = (ac - bd, ad + bc)$. Cette multiplication est commutative, bilinéaire, admet $(1, 0)$ comme élément unité, qu'on note alors $1_{\mathbb{C}}$ ou plus simplement 1 , de sorte que \mathbb{C} est un anneau commutatif contenant \mathbb{R} , au même titre que l'anneau de polynômes $\mathbb{R}[X]$.

On note i l'élément $(0, 1)$. Tout élément (a, b) de $\mathbb{C} = \mathbb{R}^2$ s'écrit $a \cdot 1_{\mathbb{C}} + b \cdot i$ ou plus simplement $a + bi$. a est appelé partie réel du nombre complexe, noté $\text{Re}(z)$; b est appelé partie imaginaire, noté $\text{Im}(z)$.

Pour $z = a + ib$ ($a, b \in \mathbb{R}$) on note \bar{z} l'élément $a - ib$. On observe que $z \mapsto \bar{z}$ est un homomorphisme involutif (i.e. $\bar{\bar{z}} = z$) de l'anneau \mathbb{C} et que les éléments de la forme $a \cdot 1_{\mathbb{C}}$, $a \in \mathbb{R}$, qu'on identifie à \mathbb{R} , sont exactement les points fixes de cette involution.

On note $|z|$ le nombre $z\bar{z} = a^2 + b^2 \geq 0$. Si $z \neq 0$ l'équation $z z' = 1_{\mathbb{C}}$ d'inconnue $z' \in \mathbb{C}$ a pour solution $z' = \frac{1}{z} \bar{z}$ de sorte que \mathbb{C} est un corps.

- [Euler 1748]: $\star z \mapsto \exp(z) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} z^n$ est un homomorphisme surjectif du groupe additif $(\mathbb{C}, +)$ sur le groupe multiplicatif $(\mathbb{C}^{\times}, \cdot)$ de noyau $2i\pi\mathbb{Z}$ (c'est l'une des définitions du nombre π !). La restriction de la fonction \exp au sous-groupe $(i\mathbb{R}, +)$ de \mathbb{C} est d'image le sous-groupe multiplicatif $S^1 = \{z \in \mathbb{C}, |z| = 1\}$. Concrètement tout nombre complexe $z \neq 0$ s'écrit $z = e^{\alpha} \cdot e^{i\theta}$ avec $\alpha, \theta \in \mathbb{R}$, ou encore $\rho e^{i\theta}$ avec $\rho > 0, \theta \in \mathbb{R}$ (forme polaire de z).

Formulaire (tel quel c'est de la magie noire) :

$$\begin{cases} \rho = e^{\alpha} = |z|, \\ e^{i\theta} = \cos(\theta) + i \sin(\theta); |e^{i\theta}|^2 = \cos^2(\theta) + \sin^2(\theta) = 1, \\ \theta = \arctan\left(\frac{\text{Im}(z)}{\text{Re}(z)}\right) \bmod 2\pi \text{ si } \text{Re}(z) \neq 0, \\ \theta = \text{sgn}(y) \frac{\pi}{2} \bmod 2\pi \text{ si } z = iy \text{ avec } y \text{ réel non nul.} \end{cases}$$

La relation $(\cos(\theta) + i \sin(\theta))^n = e^{in\theta} = \cos(n\theta) + i \sin(n\theta)$ permet de retrouver les formules trigonométriques, classiques pour $n = 2$.

- Méthodes de réécriture : Conjugué d'une expression ou d'une équation en z, \bar{z} , élimination de \bar{z} s'il y a plusieurs équations.
- systèmes d'équations de degré 1 (élimination). Plus généralement technique d'élimination d'inconnues pour un système d'équations.
- Racine carré de $z \in \mathbb{C}$ dont sait exprimer la forme polaire à partir de celle de z ; on sait aussi exprimer les parties réelle et imaginaire en terme de racine carré de nombre réel positif, voir l'exemple 1 ci-dessous

Interprétation géométrique [Argand, 1806 et d'autres] :

- a est l'abscisse et b l'ordonnée de $z = a + ib$, ($a, b \in \mathbb{R}$) relativement à la base $(1, i)$.
- $\bar{z} = a - ib$ est le symétrique de z par rapport à l'axe des réels
- Forme polaire $z = \rho e^{i\theta}$ avec $\rho > 0, \theta \in \mathbb{R} \bmod 2\pi\mathbb{Z}$.
 $\rho = |z| = \sqrt{z\bar{z}}$ est la distance de z à 0
 θ est l'angle orienté du couple de vecteurs $(1, z)$.
- La multiplication par ρ est l'homothétie de centre 0 de rapport ρ .
La multiplication par $e^{i\theta}$ est la rotation de centre 0 d'angle θ relativement à la \mathbb{R} -base orthonormée $(1, i)$.
L'addition avec b est la translation de vecteur b .

Exemples de calculs et de résolutions

- 1. Déterminer les racines dans \mathbb{C} du trinôme $X^2 + bX + c \in \mathbb{C}[X]$
▼ Details

On écrit le trinôme sous forme normale $(X + \frac{b}{2})^2 - \frac{b^2-4c}{4}$. Si $\delta, -\delta$ sont les racines carré dans \mathbb{C} du discriminant $b^2 - 4c$ alors les racines du trinôme sont $-\frac{b \pm \delta}{2}$.

δ peut être décrit en forme polaire : si on écrit $b^2 - 4c = \rho e^{i\theta}$ (comment ?) alors $\delta = (\sqrt{\rho})e^{i\theta/2}$ ou $\delta = (\sqrt{\rho})e^{i(\theta+2\pi)/2} = -(\sqrt{\rho})e^{i\theta/2}$.

On peut aussi exprimer δ avec des radicaux de nombres réels : posons $\delta = x + iy$ et $b^2 - 4c = \alpha + i\beta$ avec $x, y, \alpha, \beta \in \mathbb{R}$ alors l'égalité $\delta^2 = b^2 - 4c$ se traduit par

$$\begin{cases} x^2 - y^2 = \alpha \\ 2xy = \beta \end{cases}$$

On ajoute la relation $|\delta|^2 = |\delta^2| = |\alpha + i\beta|$ soit $x^2 + y^2 = \sqrt{\alpha^2 + \beta^2}$. En sommant les 1ère et dernière relations

: $2x^2 = \alpha + \sqrt{\alpha^2 + \beta^2}$ soit $x = \pm \frac{1}{2} \sqrt{\alpha + \sqrt{\alpha^2 + \beta^2}}$. En prenant leur différence $\leadsto y =$

$\pm \frac{1}{2} \sqrt{-\alpha + \sqrt{\alpha^2 + \beta^2}}$. Enfin les signes de x et y sont liés par la relation $2xy = \beta$ ce qui donne en tout deux solutions sauf cas exceptionnel $\alpha = \beta = 0$ (racine double).

- **2. Déterminer l'intersection des cercles $\mathcal{C}(z_0, r_0)$ avec $\mathcal{C}(z_1, r_1)$, pour $z_0 \neq z_1 \in \mathbb{C}$ et r_0, r_1 réels > 0 .**

▼ Details

Motivation : équations algébriques liées aux constructions à la règle et au compas.

Le dessin indique qu'il y a exactement deux solutions ssi $|r_0 - r_1| < |z_0 - z_1| < r_0 + r_1$, pas de solution si ...

Equations : $|z - z_0| = r_0$ et $|z - z_1| = r_1$ dont on cherche les solutions dans \mathbb{C} . En faisant le changement de variable $z' = z - z_0$ on se ramène à $z_0 = 0$ ce qui allège les notations. En exprimant le carré des modules on obtient :

$$\begin{cases} z\bar{z} = r_0^2 \\ (z - z_1)\overline{(z - z_1)} = r_1^2 \text{ soit } z\bar{z} - z\bar{z}_1 - z_1\bar{z} + |z_1|^2 = r_1^2 \end{cases}$$

La différence entre les deux équations donne la relation : $z\bar{z}_1 + z_1\bar{z} - |z_1|^2 = r_0^2 - r_1^2$.

Posons $Z = z\bar{z}_1$; Z vérifie donc

$$\begin{cases} Z\bar{Z} = |z_1|^2 r_0^2 \\ Z + \bar{Z} = |z_1|^2 + r_0^2 - r_1^2 \end{cases}$$

La 2ème équation donne la partie réelle de Z ; la première donne sa partie imaginaire (deux solutions opposées l'une de l'autre) pourvu $\frac{1}{4}(|z_1|^2 + r_0^2 - r_1^2)^2 \leq |z_1|^2 r_0^2$, autrement dit $-2|z_1|r_0 \leq |z_1|^2 + r_0^2 - r_1^2 \leq 2|z_1|r_0$.

Interprétation : le changement de variable $Z = (z - z_0)\overline{(z_1 - z_0)}$ revient à choisir $z_0 = 0, z_1 \in \mathbb{R}_+$; les deux cercles sont alors symétriques par rapport à l'axe des réels et l'intersections se calcul facilement en coordonnées. Le bénéfice du calcul littéral est de faire apparaître naturellement le changement de variable sans la motivation géométrique.

Alternative : exprimer \bar{z} en fonction de z avec la différence des équations, reporter dans $z\bar{z} = r_0^2$: on obtient

$-\frac{\bar{z}_1}{z_1} z^2 + \frac{|z_1|^2 + r_0^2 - r_1^2}{z_1} z - r_0^2 = 0$. On simplifie un peu l'expression en multipliant par $z_1 \bar{z}_1$ et en posant $Z = \bar{z}_1 z \leadsto Z^2 - (|z_1|^2 + r_0^2 - r_1^2)Z + |z_1|^2 r_0^2 = 0$. Le trinôme admet toujours une racine (voir exemple 1) alors que ce n'est pas le cas du système initial. L'obstruction vient de ce que \bar{Z} est à la fois $\frac{|z_1|^2 r_0^2}{Z}$ et le conjugué complexe de Z .

- **3. Chercher les $a, b \in \mathbb{C}$ tels que $\forall z \in \mathbb{C}, |az + b\bar{z}| = |z|$.**

▼ Details

Interprétation savante : condition sur a, b pour que l'application \mathbb{R} -affine $z \mapsto az + b\bar{z}$ soit une isométrie.

[Joachim]: On élève au carré pour réécrire l'équation en

$$(az + b\bar{z})\overline{(az + b\bar{z})} = z\bar{z}$$

puis en $(|a|^2 + |b|^2 - 1)z\bar{z} + a\bar{b}z^2 + b\bar{a}\bar{z}^2 = 0$

Une idée fructueuse est de tester (spécialiser) l'équation en $z = 1, z = i, z = 1 + i$ ce qui donne

$$\begin{cases} (|a|^2 + |b|^2 - 1) + a\bar{b} + b\bar{a} = 0 \\ (|a|^2 + |b|^2 - 1) - a\bar{b} - b\bar{a} = 0 \\ 2(|a|^2 + |b|^2 - 1) + 2ia\bar{b} - 2ib\bar{a} = 0 \end{cases}$$

Si on pose $x = |a|^2 + |b|^2 - 1, y = a\bar{b}, t = b\bar{a}$, les techniques de résolutions de système d'équations linéaires

donnent tout de suite $x = y = t = 0$ d'où $a = 0$ ou $b = 0$. Dans le cas $a = 0$ on conclut $|b| = 1$ et symétriquement dans le cas $b = 0$.

- **4. Chercher les $z \in \mathbb{C}$ vérifiant $a\bar{z} + b = z$ pour $a, b \in \mathbb{C}$ fixés.**

▼ Details

Interprétation savante : points fixes de la similitude indirecte $z \mapsto a\bar{z} + b$.

[Joachim]: En conjuguant $\sim \bar{a}z + \bar{b} = \bar{z}$; en substituant \bar{z} dans l'équation de départ $\sim (|a|^2 - 1)z + a\bar{b} + b = 0$.

Si $|a| \neq 1$ il y a une unique solution.

Si $|a| = 1$ et $a\bar{b} + b \neq 0$ il n'y a pas de solution.

La discussion dans le cas $|a| = 1$ et $a\bar{b} + b = 0$ est astucieuse : en testant en $z = 0$ et $z = b$ on observe $a\bar{0} + b = b$ et $a\bar{b} + b = 0$ donc $z = \frac{b}{2}$ est solution.

L'équation homogène (i.e. sans terme constant) est $a\bar{z} = z$. $z \neq 0$ est solution ssi $\frac{z}{|z|}$ est solution. Pour z de module 1, z est solution ssi $z^2 = a$ (Explication : $z^{-1} = \bar{z}$). L'ensemble des solutions de l'équation homogène est donc la droite réelle $\{\lambda a', \lambda \in \mathbb{R}\}$ où a' est une racine carré de a dans \mathbb{C} .

L'ensemble des $z \in \mathbb{C}$ vérifiant $a\bar{z} + b = z$ est la droite réelle $\{\frac{b}{2} + \lambda a', \lambda \in \mathbb{R}\}$.

Interprétation : sous les hypothèses sur a, b l'application $s : z \mapsto a\bar{z} + b$ est une symétrie axiale ; pour chaque point z le milieu du segment $[z, s(z)]$ est sur l'axe donc fixe par s .

1. Equation d'une droite réelle dans \mathbb{C}

- **1ère approche :** On sait réécrire l'équation d'une droite de \mathbb{R}^2

$$\alpha x + \beta y + \gamma = 0$$

d'inconnues $x, y \in \mathbb{R}$ avec $\alpha, \beta, \gamma \in \mathbb{R}$, $(\alpha, \beta) \neq (0, 0)$ en

$$\frac{1}{2}(\alpha - i\beta)z + \frac{1}{2}(\alpha + i\beta)\bar{z} + \gamma = 0$$

d'inconnue $z \in \mathbb{C}$ soit

$$\bar{b}z + b\bar{z} + \gamma = 0$$

avec $b \in \mathbb{C}^\times$ et $\gamma \in \mathbb{R}$.

- **2ème approche :**

L'ensemble

$$\{z \in \mathbb{C}, z = \bar{z}\}$$

est l'axe des réels dans \mathbb{C} , ensemble des points fixes de la symétrie axiale

$$\mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}, z \mapsto \bar{z}$$

Elle est engendrée par les points 0 et 1 pour la structure de \mathbb{R} -espace affine de \mathbb{C} , i.e. est égale à l'ensemble des combinaisons barycentriques (ou "barycentre")

$$\{\lambda \cdot 0 + (1 - \lambda) \cdot 1, \lambda \in \mathbb{R}\}$$

Son image par la similitude directe

$$j : z \mapsto az + b$$

($a, b \in \mathbb{C}$, $a \neq 0$) est la droite passant par $j(0) = b$ et $j(1) = a + b$. Elle est d'équation

$$a^{-1}(z - b) = \overline{a^{-1}(z - b)}$$

$$\Leftrightarrow \bar{a}(z - b) = a(\bar{z} - \bar{b})$$

(car $a^{-1} = \frac{\bar{a}}{|a|^2}$)

Réciproquement la droite réelle $\{\lambda \cdot a + (1 - \lambda) \cdot b, \lambda \in \mathbb{R}\}$ passant par les points $a \neq b \in \mathbb{C}$ est l'image de $\{z \in$

$\mathbb{C}, z = \bar{z}\} = \langle 0, 1 \rangle$ par l'unique similitude directe $j : z \mapsto \alpha z + \beta$ vérifiant $j(0) = a$ et $j(1) = b$, soit $\beta = a$ et $\alpha + \beta = b$ i.e. $\alpha = b - a$, donc est d'équation

$$\overline{(b-a)}(z-a) = (b-a)(\bar{z}-\bar{a})$$

($z = a$ et $z = b$ en sont manifestement des solutions.)

2. Similitude directe

Soient $a \neq 0, b \in \mathbb{C}$ et $j : z \mapsto az + b$.

j est bijective d'application réciproque $z \mapsto a^{-1}(z - b) = \frac{\bar{a}}{|a|^2}(z - b)$.

Points fixes ? Les solutions de $(a - 1)z + b = 0 \rightsquigarrow$ une seule solution si $a \neq 1$, aucune si $a = 1$ et $b \neq 0$ et bien sûr \mathbb{C} entier si $a = 1$ et $b = 0$ ($j = \text{id}$).

Vu du point fixe j est la composée de la rotation vectorielle d'angle l'argument de a et de l'homothétie vectorielle de rapport le module de a . Dit autrement l'application conjuguée

$$t_{-u} \circ j \circ t_u$$

où $u = \frac{b}{1-a}$ est le point fixe et t_u est la translation $z \mapsto z + u$, est la composée d'une rotation et d'une homothétie vectorielles.

Au passage l'ensemble des similitudes vectorielles directes est un groupe pour la composition isomorphe à $(\mathbb{C}^\times, \cdot)$.

3. Involutions parmi les similitudes indirectes

L'application

$$s : \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}, z \mapsto \bar{z}$$

est la symétrie axiale par rapport à l'axe des réels.

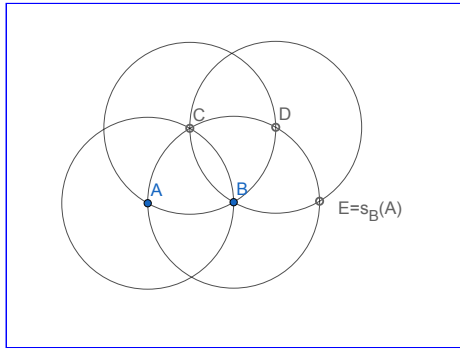
L'application conjuguée $j \circ s \circ j^{-1}$ pour $j : z \mapsto az + b$ avec $a \neq 0$ est la symétrie axiale d'axe $j(\mathbb{R})$. Son expression est $z \mapsto a \frac{\bar{a}}{|a|^2} \overline{(z - b)} + b = \left(\frac{a}{|a|}\right)^2 (\bar{z} - \bar{b}) + b$.

Constructions à la règle et au compas – pub

F-X. Dehon — 24 avril 25

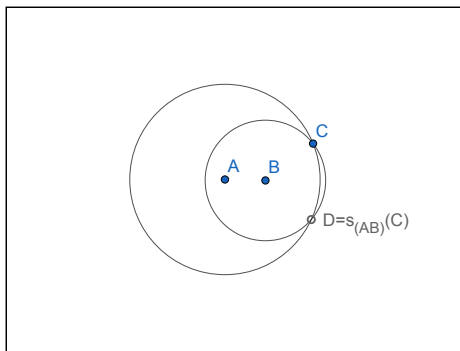
★ = difficile, hors programme

1. Symétrie centrale au compas seul



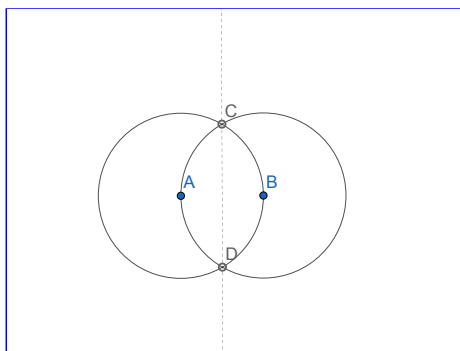
[Symétrie centr.ggb](#)

2. Symétrie axiale



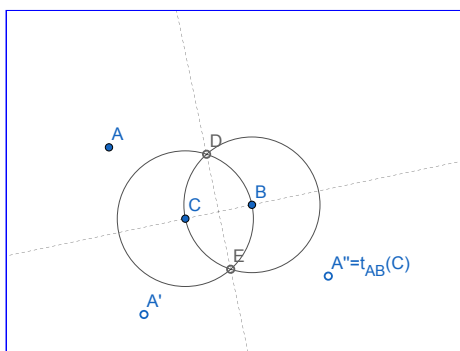
[Symétrie ax.ggb](#)

3. Médiatrice



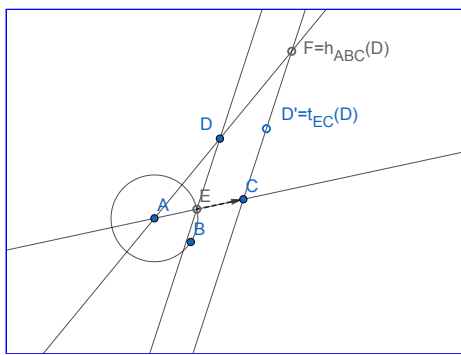
[médiatrice.ggb](#)

4. Translation à l'aide de médiatrices et symétries axiales



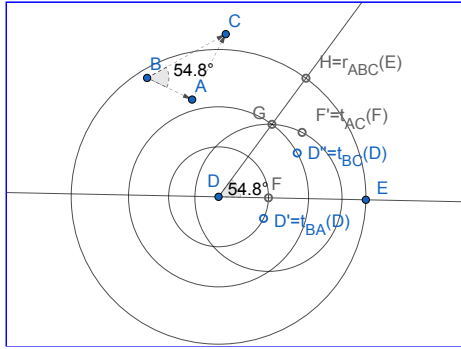
[translation.ggb](#)

5. Homothétie à la règle et au compas à l'aide de translation



[homothétie.ggb](#)

6. Rotation à la règle et au compas à l'aide de translation



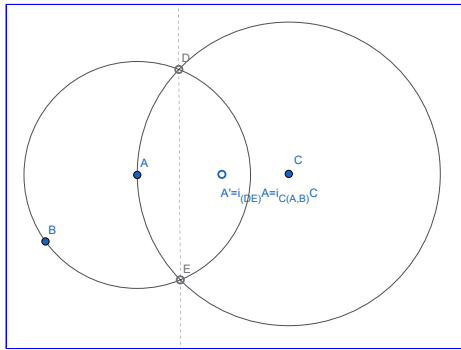
[rotation.ggb](#)

Variante : au compas avec translation et homothétie (laquelle ci-dessus utilise la règle)

Alternative : Translation du secteur angulaire vers le centre voulu de la rotation puis construction de la bissectrice \rightarrow deux symétrie axiales dont la composée donne la rotation.

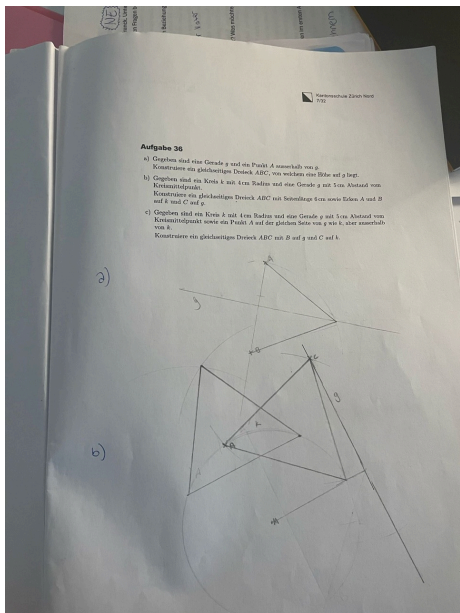
7. ★ Inversion au compas avec symétrie axiale

Pourvu que $AC > \frac{AB}{2}$, sinon préparation



[Inversion.ggb](#)

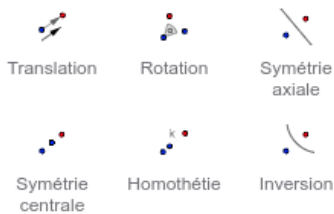
8. Exercices ("la construction est une forme de calcul")



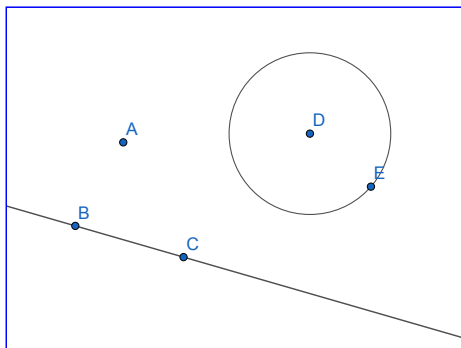
On peut utiliser les outils un fois qu'on les a construit (brique de construction)

Dans Geogebra :

Transformations



Ex.1. Etant donné A, B, C, D, E en position général, construire M, N tels que $M \in (BC), N \in \mathcal{C}(D, E)$ et AMN est équilatéral.



[Ex. Equilatéral.ggb](#)

Ex.2. Etant donné A, B, C , construire M tel que $BM = BC$ et AMB est rectangle en M .

Solution avec le cercle circonscrit, autre solution en construisant les angles

Ex.3. Variante de l'ex.2 : On donne l'angle AMB quelconque au lieu de l'angle droit.

Ex.4. Construction du milieu de $[AB]$ au compas seul

*Triangles isocèles semblables caractérisé par l'angle au sommet ou à la base, Cf [TD3 - 21 avril 25 ex.1.3](#)

Ex.5.★ Construction du centre du cercle circonscrit à un triangle isocèle avec l'inversion

Ex. Intersection de $\mathcal{C}(A, B)$ avec (CD) au compas seul

Avec la symétrie axiale par rapport à (CD) lorsque (CD) ne passe pas par le centre de $\mathcal{C}(A, B)$; et sinon ?

Ex.5bis. Après ex.5. Construction du centre du cercle circonscrit à un triangle.

Ex.6. Après ex.5. Construction de l'intersection de (AB) avec (CD) au compas seul avec l'inversion.

9. ★ Nombres constructibles

Comme distance entre deux points construits

$\operatorname{Re}(\exp(i\frac{\pi}{5}))$ est racine de $4X^2 + 2X - 1$. Construction des racines \leadsto construction du pentagone régulier à la règle et au compas.

[Polycopié du cours de J. Yameogo en L2 2010\(?\)](#) PDF

Achèvement ▾

458.3 Ko · Déposé le 26 mars 25, 17:00

[Notes du cours 1 \(13 mars\)](#)

Achèvement ▾

[Feuille de TD 1 - 17 mars](#) PDF

Achèvement ▾

151.4 Ko · Déposé le 17 mars 25, 10:59

[Feuille TD 1 complétée](#) PDF

Achèvement ▾

Révision du 24 mars 25

Sous-espaces affines, problèmes d'équations, d'intersections et de distances

418.7 Ko

[Note du cours 2 \(20 mars\)](#)

Achèvement ▾

[Notes du cours 3 \(27 mars\)](#)

Achèvement ▾

[Notes du cours 4 \(3 avril\)](#)

Achèvement ▾

[Feuille TD 2 - 7 avril](#) PDF

Achèvement ▾

Interprétation euclidienne de l'équation d'un hyperplan

Barycentres

Applications affines, sous-espaces des points fixes, pb de construction du transformé d'un point

177.7 Ko · Déposé le 8 avr. 25, 16:16

[Interrogation du 10 avril](#) PDF

Achèvement ▾

124.9 Ko

[barème-int1B](#) PDF

Achèvement ▾

554.8 Ko · Déposé le 21 mai 25, 09:51



[Un corrigé du sujet B de l'inter. du 10 avril](#) PDF

Achèvement ▾

843.5 Ko · Déposé le 14 mai 25, 17:59



[Un corrigé du sujet A](#) PDF

Achèvement ▾

Ex.1,2,3 uniquement. Méthodes alternatives à celles du corrigé du sujet B.

403.8 Ko · Déposé le 19 mai 25, 15:52

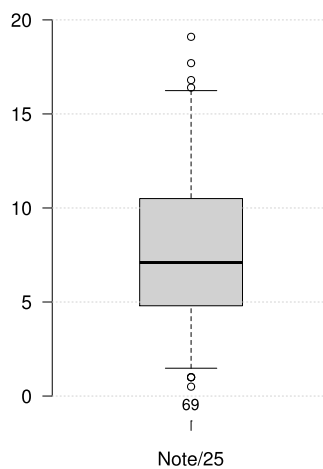
Notes à l'interrogation du 10 avril publiées le 21 mai, provisoires suivant le barème ci-dessous, sous réserve (seule la copie fait foi).

Int1	Q	ex1	ex2	ex3	ex4ad	ex4e
barème sur copie	3,5	2	4	4	8,5	4
barème dans note	3	3	5	5	6	3
coef ds note	0,9	1,5	1,3	1,3	0,7	0,8

(Ainsi les points obtenus pour l'ex.1 dans la copie sont multipliés par 1.5 dans la note sur 20, etc.)

Distribution des notes pour ce barème

Int1



[Feuille TD 3 - 21 avril](#) PDF

Achèvement ▾

Retour sur "Une application préservant les distances est affine"

Calcul littéral dans \mathbb{C} , application aux similitudes, angles et triangles semblables.

168.5 Ko · Déposé le 19 avr. 25, 12:24



[Notes du cours 5 \(17 avril\)](#)

Achèvement ▾



[Notes du cours 6 \(24 avril\)](#)

Achèvement ▾



[Complément : Construction à la règle et au compas](#)

Achèvement ▾

7 mai 25 — Construction de l'image d'un point par certaines transformations, qq exercices de constructions dans la thématique des feuilles de TD. Démonstrations avec Geogebra.



[Note de cours : calcul littéral sur C pour la géométrie euclidienne du plan](#)

Achèvement ▾

7 mai 25 — Notions, exemples de calcul et développements en réponse à l'ex.1.6c de la feuille TD1 et ex.1.1 de la feuille TD3.



[Complément : variables, calculs et raisonnements en géométrie](#)

Achèvement ▾

Une illustration par deux exemples des libertés de choix du paramétrage des inconnues d'un problème, et du prix à payer pour chacun de ces choix.
Le premier exemple reprend l'exercice 1 de l'interrogation du 10 avril.



[Sujet de l'examen du 23 mai 25 avec barème + corrigé](#) (PDF)

Achèvement ▾

Barème :

Examen	Q	ex1	ex2a-c	ex2d	ex3a	ex3b	ex4	total
barème sur copie	5,5	6	6	3	3,5	2	3,5	
barème dans note	5	5	5	2	4	2	4	27
coef ds note	0,9	0,8	0,8	0,7	1,1	1,0	1,1	

1.2 Mo · Déposé le 26 mai 25, 13:47



[Sujet de session 2 et corrigé](#) (PDF)

Achèvement ▾

Barème de correction :

Session 2	Ex1ab	ex1c	ex2a	ex2b	ex3ac	ex3de	Total
barème sur copie	7	3,5	1	2	7	4	
barème dans note	7	3,5	2	2	7	4	25,5
coef ds note	1,0	1,0	2,0	1,0	1,0	1,0	

1.5 Mo · Modifié 11 juil. 25, 18:22

[◀ Syllabus](#)

Aller à... ▾

[Corrigés, etc. ▶](#)

L2géo - Int1 - 10avr25 - B

Durée 1h30. Documents et matériel électronique interdit.

Justifier raisonnablement chaque réponse

Q. Soit \mathcal{F} un sous-espace affine non vide de \mathbb{R}^3 .

a. Qu'appelle t-on direction de \mathcal{F} ?

b. Qu'appelle t-on repère [cartésien] de \mathcal{F} ?

c. Le sous-ensemble de \mathbb{R}^3 formé du seul vecteur nul (un seul élément) est il un sous-espace affine ?
Si oui donnez en la direction et un repère.

Ex.1. Soient A, B, C, D quatre points de \mathbb{R}^2 . Montrer l'équivalence entre les conditions :

(i) $\vec{AD} = \vec{BC}$

(ii) Les segments $[AC]$ et $[BD]$ ont même milieu.

Ex.2. Déterminer les équations des droites de \mathbb{R}^2 passant par le point $(-2, -1)$ et tangentes au cercle de centre $(1, 0)$ de rayon 1.

Ex.3. Soit $ABCD$ un carré (les côtés sont donc $[AB]$, $[BC]$, $[CD]$ et $[DA]$). Soit E un point de la droite (BC) et F l'intersection de la médiatrice de $[AE]$ avec la droite (BD) .

a. Faites un dessin.

b. Le point F est il toujours bien défini ?

c. Montrer que lorsque F est défini le triangle AFE est rectangle en F .

Indication : travailler en coordonnées dans le repère (B, \vec{BA}, \vec{BC}) .

Ex.4. Soient $A = (2, -1, -3), B = (2, 2, 1), C = (-1, 1, 2), D = (1, 1, -1)$ dans \mathbb{R}^3 .

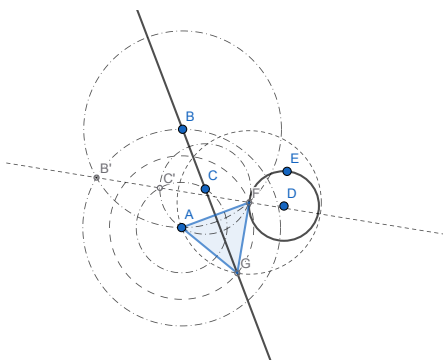
a. Déterminer le point H de la droite (AB) tel que \vec{CH} soit orthogonal à \vec{AB} .

b. Déterminer une équation du plan \mathcal{P} passant par A, B et orthogonal à \vec{CH}

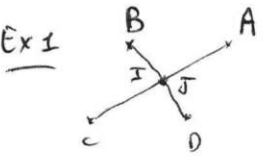
c. Quelle est la distance du point C à la droite (AB) ? et au plan \mathcal{P} ?

d. Déterminer un repère puis une équation du plan \mathcal{P}' passant par A, B et parallèle à la droite (CD) .

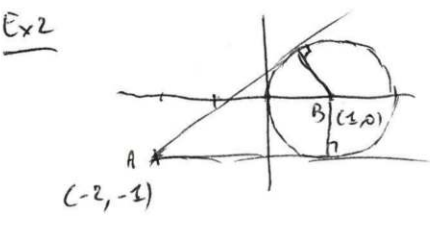
e. Montrer que la distance de C à \mathcal{P}' coïncide avec le minimum des distances entre un point de (AB) et un point de (CD) . Que vaut cette distance ?



- Q a direction de \mathcal{F} = sous espace vectoriel F de \mathbb{R}^3 tel que $\mathcal{F} = O + F = \{O + u, u \in F\}$ pour O un point (et^l) de \mathcal{F}
 b Repère cartésien de $\mathcal{F} = (O, u_1, u_2)$ avec $O \in \mathcal{F}$ et (u_1, u_2) base de F (Facilement $\mathbb{R} \leq \mathbb{S}$)
 c $\{O\}$ s'écrit $O + \{0\}$ donc est un ss espace affine de direction $\{0\}$ (un point) de repère (O) (base vide)
 sev de \mathbb{R}^3



Notons I, J les milieux de $[AC]$ et $[BD]$. On a $\vec{AI} = \vec{IC}$ et $\vec{BJ} = \vec{JD}$
 $\vec{AD} - \vec{BC} = \vec{AI} + \vec{IJ} + \vec{JD} - (\vec{BJ} + \vec{JI} + \vec{IC}) = \underbrace{\vec{AI} - \vec{IC}}_{=0} + \underbrace{\vec{JD} - \vec{BJ}}_{=0} + 2\vec{IJ}$
 donc $\vec{AD} = \vec{BC} \Leftrightarrow 2\vec{IJ} = 0 \Leftrightarrow I = J$



Soit \mathcal{D} d'équation $ax + by = c$ avec $(a,b) \neq (0,0)$
 $(\vec{AH}, \vec{HN}) = 0$ avec $B = (1,0)$, H projeté orthogonal de B sur \mathcal{D}
 $N = (x,y)$, puisque $B \neq H$ i.e. $B \notin \mathcal{D}$
 les contraintes sont $\begin{cases} \|\vec{BH}\|^2 = 1^2 = 1 & (\mathcal{D} \text{ est à distance 1 du centre du cercle}) \\ (\vec{BH}, \vec{HA}) = 0 & (\mathcal{D} \text{ passe par A}) \end{cases}$

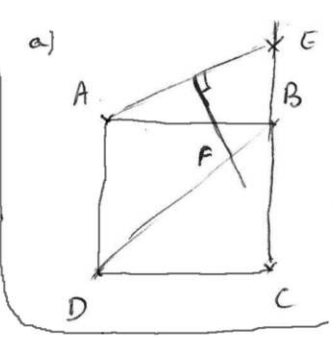
$(\vec{BH}, \vec{HN}) = (\vec{BH}, \vec{HB}) + (\vec{BH}, \vec{BN}) \quad N = A \Rightarrow (\vec{BH}, \vec{BA}) = -1$
 $= -\|\vec{BH}\|^2 = -1$

Posons $\vec{BH} = (a,b)$ et l'équation de \mathcal{D} est $((a,b), (2-1,y)) = 1$
 $\Leftrightarrow ax + by = 1+a$
 c) $\begin{cases} a^2 + b^2 = 1 \\ ((a,b), (-3,-1)) = 1 \end{cases} \Leftrightarrow 3a + b = -1$

On résout (1): $b = -1 - 3a \Rightarrow \frac{a^2 + (-1-3a)^2}{10a^2 + 6a + 1} = 1 \Rightarrow \begin{cases} a = 0 & a = -\frac{3}{5} \\ b = -1 & b = -1 + \frac{3}{5} = -\frac{2}{5} \end{cases}$

Ex 3

b F est bien défini $\Leftrightarrow E \neq A$ et (AE) n'est pas orthogonale à (BD)
 où car $A \notin (BC) \Leftrightarrow E \neq C$
 sauf $A=B=C=D$



c Il suffit de montrer $(\vec{AF}, \vec{FE}) = 0$

Ds le repère (B, \vec{BA}, \vec{BC}) E est de coordonnées $(0, x)$ pour un $x \in \mathbb{R}$, F est de coordonnées (y, y) pour un $y \in \mathbb{R}$ comme tout pt de (BD) . On a de plus $AF = FE$ soit $AF^2 = FE^2$ soit $(y-1)^2 + y^2 = (-y)^2 + (x-y)^2$
 $(1,0)$

$y^2 - 2y + 1 + y^2 = x^2 - 2xy + y^2$
 $2y(x-1) = x^2 - 1 = (x-1)(x+1)$
 $E \neq C \Leftrightarrow x \neq 1$ et alors $2y = x+1$

Plaçons nous en calcul $(\vec{AF}, \vec{FE}) = y(1-y) + y(x-y) = y(1+x-2y) = 0$ OK
 $(y-1, y) \quad (-y, x-y)$

(com L2 géo Int 1 B)

Ex 4 Données: $\begin{cases} A = (2, -1, -3) \\ B = (2, 2, 1) \\ C = (-1, 1, 2) \\ D = (1, 1, -1) \end{cases}$ ds \mathbb{R}^3

a) $H \in (AB)$ et $\vec{CH} \perp \vec{AB}$: on écrit $H = A + \lambda \vec{AB}$ avec $\lambda \in \mathbb{R}$ inconnu. $\rightarrow (\vec{CH} | \vec{AB}) = (\vec{CA} | \vec{AB}) + \lambda (\vec{AB} | \vec{AB})$
 $= \vec{CA} + \lambda \vec{AB} \Big|_{\vec{AB}} = (0, 3, 4)$
 $= (3, -2, -5)$
 $= -2 \times 3 - 5 \times 4 + \lambda (3^2 + 4^2)$
 $= -26 + 25\lambda$ avec $25\lambda = 26 \Rightarrow \lambda = \frac{26}{25}$

$\rightarrow H = A + \lambda \vec{AB} = (2, -1, -3) + \frac{26}{25} (0, 3, 4) = (2, \frac{1}{25}(-25 + 3 \times 26), \frac{1}{25}(-3 \times 25 + 4 \times 26)) = (2, \frac{53}{25}, \frac{29}{25})$

Rq: il est avantageux pour les calculs (additions, multiplications de nombres rationnels) d'écrire $2 + \frac{3}{25}$ plutôt que $\frac{53}{25}$, etc.

b) \mathcal{P} plan passant par A, B et orthogonal à \vec{CH}

\uparrow
 \mathcal{P} plan passant par H et orthogonal à \vec{CH} puisque $H \in (AB) \subset \mathcal{P}$ et $\vec{AH}, \vec{BH} \perp \vec{CH}$

$\Pi = (x, y, z) \in \mathcal{P} \Leftrightarrow (\vec{CH} | \vec{H\Pi}) = 0 \Leftrightarrow -(\vec{CH} | \vec{CH}) + (\vec{CH} | \vec{C\Pi}) = 0$ ce n'est pas mieux ainsi.
 $\vec{H\Pi} = \vec{H\Pi} = (x - 2, y - \frac{53}{25}, z - \frac{29}{25})$
 $= (3, \frac{28}{25}, -\frac{21}{25})$

$\Leftrightarrow ((3, \frac{28}{25}, -\frac{21}{25}) | (x - 2, y - \frac{53}{25}, z - \frac{29}{25})) = 0$

$\Leftrightarrow 3(x - 2) + \frac{28}{25}(y - \frac{53}{25}) - \frac{21}{25}(z - \frac{29}{25}) = 0 \Leftrightarrow 3x + \frac{28}{25}y - \frac{21}{25}z = 6 + \frac{28 \times 53}{25^2} - \frac{21 \times 29}{25^2}$

Plus malin : on sait que \vec{CH} est un vecteur normal à \mathcal{P} donc \mathcal{P} a une équation de la forme $3x + \frac{28}{25}y - \frac{21}{25}z = d$

$(3, \frac{28}{25}, -\frac{21}{25})$

pour un $d \in \mathbb{R}$. En fait $B \in \mathcal{P}$ par exemple $\rightarrow 3 \times 2 + \frac{28}{25} \times 2 - \frac{21}{25} \times 1 = d \rightarrow d = 6 + \frac{35}{25} = 6 + \frac{7}{5} = \frac{37}{5}$
 $(2, 2, 1)$

c) $d(C, (AB)) = \|\vec{CH}\|$ puisque $\forall \Pi \in (AB), C\Pi^2 = CH^2 + H\Pi^2 > CH^2$ avec égalité si $\Pi = H$
 idem pour $d(C, \mathcal{P})$

$\|\vec{CH}\|^2 = 3^2 + (\frac{28}{25})^2 + (-\frac{21}{25})^2 = 9 + (1 + \frac{3}{5^2}) + (1 - \frac{4}{5^2}) = 9 + 1 + 1 + \frac{2 \times 3}{5^2} - \frac{2 \times 4}{5^2} + \frac{3^2}{5^2} + \frac{4^2}{5^2}$
 $= 11 - \frac{2}{5^2} + \frac{25}{5^2} = 11 - \frac{1}{25}$

$\rightarrow d(C, (AB)) = d(C, \mathcal{P}) = \sqrt{11 - \frac{1}{25}}$

d) \mathcal{P}' plan passe par A et B $\Leftrightarrow A \in \mathcal{P}'$ et $\vec{AB} \in \mathcal{P}'$ (direction de \mathcal{P}') $\mathcal{P}' \supset A + \text{Vect}(\vec{AB}, \vec{CD})$
 $\mathcal{P}' \parallel (CD) \Leftrightarrow \vec{CD} \in \mathcal{P}'$

On observe $\vec{CD} = (2, 0, -3)$ n'est pas colinéaire à $\vec{AB} = (0, 3, 4)$ donc $A + \text{Vect}(\vec{AB}, \vec{CD})$ est un plan et (A, \vec{AB}, \vec{CD}) en est un repère, donc $\mathcal{P}' = A + \text{Vect}(\vec{AB}, \vec{CD})$ et (A, \vec{AB}, \vec{CD}) en est un repère.

Equation: $\Pi(x, y, z) \in \mathcal{P}' \Leftrightarrow \exists \lambda, \mu \in \mathbb{R}, \vec{A\Pi} = \lambda \vec{AB} + \mu \vec{CD} \Leftrightarrow \begin{pmatrix} 0 & 2 \\ 3 & 0 \\ 4 & -3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \lambda \\ \mu \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x - 2 \\ y - 1 \\ z + 3 \end{pmatrix} \Leftrightarrow \exists \lambda, \mu \text{ tels que } \begin{cases} \mu = \frac{1}{2}(x - 2) \\ \lambda = \frac{1}{3}(y - 1) \\ -\frac{3}{2}(x - 2) + \frac{4}{3}(y - 1) = z + 3 \end{cases}$
 $\Leftrightarrow -\frac{3}{2}x + \frac{4}{3}y - z = -\frac{4}{3}$

e. Soit H' le projeté orthogonal de C sur \mathcal{P}' alors $d(C, \mathcal{P}') = \|\vec{CH}'\|$

On écrit $A\vec{H}' = \lambda \vec{AB} + \mu \vec{CD}$. Posons $K = C - \mu \vec{CD}$, $L = H' - \mu \vec{CD}$

On observe $K \in (CD)$, $L \in (AB)$ car $\vec{AL} = A\vec{H}' + H'\vec{L} = \lambda \vec{AB}$, $\vec{KL} = \vec{CH}'$ donc $KL = CH'$

$$\left[\begin{array}{l} \vec{KL} = \vec{CH}' \in \text{Vect}(\vec{AB}, \vec{CD})^\perp = \mathcal{P}'^\perp \\ \forall M \in (AB), N \in (CD) \text{ on a } MN^2 = MK^2 + KL^2 + LN^2 + 2(\vec{MK}, \vec{LN}) \end{array} \right.$$

Soit $M \in (AB)$, $N \in (CD)$ on écrit $N = C + \mu \vec{CD}$ et on pose $N' = H' + \mu \vec{CD}$ alors $N' \in \mathcal{P}'$ et $\vec{NN}' = \vec{CH}' \perp \mathcal{P}'$
donc $CH' = NN' = d(N, \mathcal{P}') \leq MN'$ avec égalité pour $M = K$ et $N' = L$
 \uparrow
car $N' \in \mathcal{P}'$

Conclusion $d((AB), (CD)) = CH' = KL$

Calcul de CH' .

Méthode 1: calcul direct de $\min_{x,y \in \mathbb{R}} \{MN, M \in (AB), N \in (CD)\} = \min_{x,y \in \mathbb{R}} \|yC + (1-y)D - xA - (1-x)B\|$
 $= \sqrt{\min_{x,y \in \mathbb{R}} \|\quad\|^2}$

$$\|\quad\|^2 = \left\| \underbrace{(-y + 1 - y - 2x - 2(1-x))}_{-1-2y}, \underbrace{(y + 1 - y - x(-1) - 2(1-x))}_{-1+3x}, \underbrace{(2y - (1-y) - (-3)x - (1-x))}_{-2+3y+4x} \right\|^2$$

$$= (-1-2y)^2 + (-1+3x)^2 + (-2+3y+4x)^2 \quad \text{qu'on ne développe pas}$$

$$\|\quad\|^2 \text{ est minimal en } (x,y) \Rightarrow \frac{\partial}{\partial x} \|\quad\|^2 = \frac{\partial}{\partial y} \|\quad\|^2 = 0$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} 6(-1+3x) + 8(-2+3y+4x) = 0 & \Leftrightarrow 25x + 12y - 11 = 0 \\ +4(1+2y) + 6(-2+3y+4x) = 0 & \Leftrightarrow 12x + 13y - 4 = 0 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} L1 - 2L2 \begin{cases} x - 14y - 3 = 0 \\ 12x + 13y - 4 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 3 + 14y \\ (13 + 12 \times 14)y + 32 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y = -\frac{32}{181} \\ x = \frac{3 \times 181 - 32 \times 14}{181} \end{cases} \end{cases}$$

et la distance cherchée est $\sqrt{(1+2y)^2 + (-1+3x)^2 + (-2+3y+4x)^2}$

Méthode 2: avec l'équation de \mathcal{P}' : de la forme $(M, (x,y,z)) = (M, A)$ car M est un vecteur $\neq 0$ orthogonal à \mathcal{P}'

(4d): $M = (-\frac{3}{2}, \frac{4}{3}, -1)$ donc aussi $(-3, 8, -6)$

$(M, \vec{CH}') = (M, \vec{CA})$ car $H', A \in \mathcal{P}'$

$|(M, \vec{CH}')| = \|M\| \times \|\vec{CH}'\|$ car \vec{CH}' et \vec{M} sont colinéaires car dans \mathcal{P}'^\perp

$d(C, \mathcal{P}') = \|\vec{CH}'\| = \frac{|(M, \vec{CA})|}{\|M\|}$

$\vec{CA} = (-3, 2, 5)$ (4a) $\Rightarrow (M, \vec{CA}) = (-3)(-3) + 2 \times 8 + 5(-6) = 27 + 16 - 30 = 13$

$\|M\|^2 = (-3)^2 + 8^2 + (-6)^2 = 81 + 64 + 36 = 181$

$\Rightarrow d(C, \mathcal{P}') = \frac{13}{\sqrt{181}}$

L2géo - Int1r - 5mai25

Durée 1h30. Documents et matériel électronique interdit.

Justifier raisonnablement chaque réponse

Q. a. Qu'est-ce qu'un sous-espace affine de \mathbb{R}^3 ? Donnez un exemple de sous-espace affine qui ne soit pas un sous-espace vectoriel.

b. Soit \mathcal{D} la demi-droite $\{(x, x, x) \in \mathbb{R}^3, x \geq 0\}$. L'ensemble des vecteurs \vec{MN} , M, N décrivant \mathcal{D} , est-il un sous-espace vectoriel de \mathbb{R}^3 ? L'ensemble \mathcal{D} est-il un sous-espace affine ? Pourquoi ?

Ex.1. Soient A, B, C trois points distincts de \mathbb{R}^2 . Montrer l'équivalence entre les conditions :

- (i) Le triangle ABC est rectangle en B
- (ii) Le point B est sur le cercle de diamètre $[AC]$.

Ex.2. Soit $ABCD$ un carré (les côtés sont donc $[AB]$, $[BC]$, $[CD]$ et $[DA]$). Soit E un point de la droite (CD) et F l'intersection de la médiatrice de $[BE]$ avec la droite (AC) .

a. Faites un dessin.

b. Le point F est-il toujours bien défini ?

c. Montrer que lorsque F est défini le triangle BFE est rectangle en F .

Indication : travailler en coordonnées dans le repère (C, \vec{CD}, \vec{CB}) .

Ex.3. Déterminer les équations des droites de \mathbb{R}^2 passant par le point $(-2, -2)$ et tangentes au cercle de centre $(1, 0)$ de rayon 1.

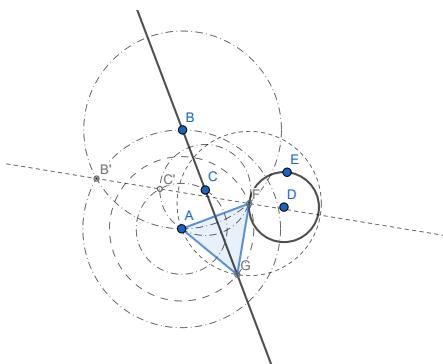
Ex.4. Soient $A = (-1, 1, 2)$, $B = (1, 1, -1)$, $C = (2, -1, -3)$ et $D = (2, 2, 1)$ dans \mathbb{R}^3 .

a. Déterminer le point H de la droite (AB) tel que \vec{CH} soit orthogonal à \vec{AB} .

Quelle est la distance du point C à la droite (AB) ?

b. Déterminer un repère puis une équation du plan \mathcal{P}' passant par A, B et parallèle à la droite (CD) .

c. Montrer que la distance de C à \mathcal{P}' coïncide avec le minimum des distances entre un point de (AB) et un point de (CD) . Que vaut cette distance ?



L2géo - examen - 23 mai 25

Durée 2h. Documents et matériel électronique interdit.

Justifier raisonnablement chaque réponse ! Il est toujours bien venu de faire un dessin représentatif : Même si le dessin ne sera pas considéré comme une justification, il participe à la clarté de la rédaction.

On note MN la distance usuelle dans \mathbb{R}^n entre deux points M, N : $MN = \|\vec{MN}\|$.

- 1 Q. a. Qu'est-ce qu'une application affine de \mathbb{R}^p dans \mathbb{R}^q ?
- 1 b. Soit $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ une application affine bijective. Montrer que l'image par f d'une droite affine de \mathbb{R}^2 est une droite affine de \mathbb{R}^2 .
- 1 Montrer que si $\mathcal{D}, \mathcal{D}'$ sont deux droites parallèles de \mathbb{R}^2 alors $f(\mathcal{D})$ est parallèle à $f(\mathcal{D}')$.
- c. Soit $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ une application affine vérifiant :
- Pour toute droite \mathcal{D} de \mathbb{R}^2 , $f(\mathcal{D})$ est une droite parallèle à \mathcal{D} .
- 1,5 Montrer que f est une homothétie ou une translation. (Utilisez vos connaissances de L2.)
- 1 d. Que peut on dire d'une application affine $\mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$ transformant tout plan \mathcal{P} en un plan parallèle à \mathcal{P} ?

Ex.1. Calculs dans le plan complexe

a. Soient h_1 et h_2 les applications $\mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$ données par

$$h_1(z) = z + i - 1, h_2(z) = -\frac{1}{2}z + 1 - i.$$

- 0,5 Observer que h_1 est une translation. De quel vecteur ?
- 1,5 (Observer que h_2 est une homothétie. Quel est son centre ?
Quelle est l'expression de l'homothétie de centre $-1 - i$ de rapport 2 ?
- 1 Les composées $h_1 \circ h_2$ et $h_2 \circ h_1$ sont elles égales ?
- b. A $z_0 \in \mathbb{C}$ on associe la symétrie centrale $\mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$ de centre z_0 , notée s_{z_0} . Quelle est l'expression de $s_{z_0}(z)$?
- Soient $n \geq 0$ un entier et z_0, \dots, z_n des éléments de \mathbb{C} . Montrer que la composée $s_{z_0} \circ \dots \circ s_{z_n}$ est :
- 1 - une symétrie centrale si n est pair — quel est alors son centre en fonction de z_0, \dots, z_n ?
- 1 - une translation si n est impair — de quel vecteur ?

Ex.2. Droite et cercle — Soient $A \neq B$ et M trois points de \mathbb{R}^2 .

- 1 a. Montrer l'équivalence $AM^2 + BM^2 = AB^2 \Leftrightarrow M \in \mathcal{C}([AB])$ (le cercle de diamètre $[AB]$).
- 1 b. Quel est le lieu de (i.e. l'ensemble décrit par) les points $M \in \mathbb{R}^2$ vérifiant $\frac{1}{3}AM^2 + \frac{2}{3}BM^2 = AB^2$?

Indication : introduire dans l'expression $\frac{1}{3}AM^2 + \frac{2}{3}BM^2$ le barycentre $\frac{1}{3}A + \frac{2}{3}B \in \mathbb{R}^2$.

c. On suppose $M \neq A, B$. Soit Δ la droite issue de B et perpendiculaire à la droite (AM) et soit M' le symétrique de M par rapport à Δ . Montrer que M' appartient à l'intersection de (AM) avec

le cercle centré en B passant par M , noté $\mathcal{C}(B, M)$.

En déduire $(AM) \cap \mathcal{C}(B, M) = \{M\} \Leftrightarrow AM^2 + BM^2 = AB^2$.

d. Soient A, B, C trois points non alignés du plan. Donner avec justification les étapes d'une construction à la règle et au compas, à partir des points A, B, C , de la tangente à $\mathcal{C}(B, C)$ issue de A .

Pour chacune des étapes de construction, y a-t-il des conditions sur A, B, C pour que l'étape aboutisse ?

Ex.3. Droite et cercle bis — On considère dans \mathbb{R}^2 les points $A = (-1, 2)$, $B = (4, 2)$ et \mathcal{D}_m la droite d'équation $y = m(x + 1) + 2$ dépendant d'un paramètre $m \in \mathbb{R}$.

a. Déterminer les coordonnées du projeté orthogonal H de B sur \mathcal{D}_m .

Pour quelle(s) valeur(s) de m a-t-on $BH = 3$?

b. Observer que les entiers 3, 4, 5 forment un "triplet pythagoricien". Pourriez vous en déduire la valeur de m sans calcul ? (Cf ex. 1c), Faites un dessin et utiliser la relation entre pente et angle au point d'origine.

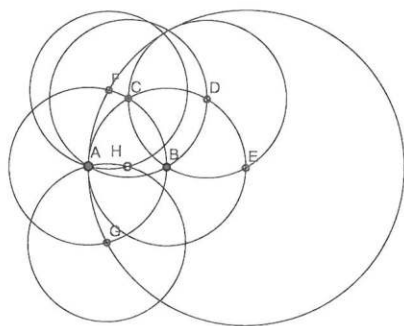
Ex.4. Reprise — Soit $ABCD$ un carré (les côtés sont donc $[AB]$, $[BC]$, $[CD]$ et $[DA]$). Soit M un point de la droite (AD) et N l'intersection de la médiatrice de $[CM]$ avec la droite (BD) .

a. Faites un dessin.

b. Quel est le lieu (l'ensemble) des points N lorsque M décrit (AD) ?

c. Montrer que lorsque le triangle MNC est bien défini il est rectangle en N .

Indication : travailler en coordonnées dans un repère adapté.



Com exam du 23 mai 25

Qa $f: \mathbb{R}^p \rightarrow \mathbb{R}^q$ est affine s'il existe $O \in \mathbb{R}^p$ et $\varphi: \mathbb{R}^p \rightarrow \mathbb{R}^q$ linéaire tq $\forall \vec{r} \in \mathbb{R}^p, f(\vec{r}) = f(O) + \varphi(\vec{r}-O)$

c'est équivalent à l'existence de $\varphi: \mathbb{R}^p \rightarrow \mathbb{R}^q$ linéaire tq $\forall M, N \in \mathbb{R}^p, \overrightarrow{f(MN)} = \varphi(\overrightarrow{MN})$

b Soit D droite affine de $\mathbb{R}^2, D = A + \text{Vect}(u)$ avec $u \neq 0 \in \mathbb{R}^2$ Alors $f(D) = \{ f(A + \lambda u), \lambda \in \mathbb{R} \}$
 $= \{ A + \lambda u, \lambda \in \mathbb{R} \}$
 $= \{ f(A) + \lambda \varphi(u), \lambda \in \mathbb{R} \}$

Puisque f est bijective, $f(A) \neq f(A+u)$ donc $\varphi(u) \neq 0$ donc $\{ f(A) + \lambda \varphi(u), \lambda \in \mathbb{R} \} = \overbrace{f(A) + \varphi(u)}^{f(A) + \varphi(u)}$ est une droite

$D = A + \text{Vect}(u), D' = B + \text{Vect}(v)$ avec $u, v \neq 0. D // D'$ si u et v sont proportionnels ($\exists \lambda \in \mathbb{R}, \lambda \neq 0, v = \lambda u$)

mais alors $\varphi(u)$ et $\varphi(v)$ sont proportionnels donc $f(D) // f(D')$

c. f affine Soit $u \neq 0, f(A + \text{Vect}(u)) = f(A) + \text{Vect}(\varphi(u))$ est une droite parallèle à $A + \text{Vect}(u)$ si $\varphi(u) \neq 0$ et est proportionnel à u , autrement dit u est un vecteur propre de φ pour une valeur propre $\neq 0$

L'hypothèse indique donc $\mathbb{R}^2 = \bigcup_{\lambda \neq 0} E_\lambda$ où $E_\lambda = \text{Ker}(\varphi - \lambda \text{id})$ espace propre pour λ .

Or φ a au plus un nombre fini de valeurs propres. Une réunion ^{finie} de sous-espaces vectoriels est un ss-espace vectoriel seulement si l'un d'eux contient tous les autres. Donc $\exists \lambda \neq 0$ tq $\mathbb{R}^2 = E_\lambda$ et alors $\varphi = \lambda \text{id}$.

Si $\lambda = 1$ $\varphi = \text{id}$ et f est une translation

Si $\lambda \neq 1$ f est une homothétie de rapport λ de centre l'unique point \vec{r} tq $f(\vec{r}) = \vec{r}$.

d. On va se ramener à (c) en montrant que l'image par f d'une droite D est une droite parallèle à D . Soit $A + \text{Vect}(u), u \neq 0$, une droite. On complète u en une base (u, v, w) de \mathbb{R}^3 . L'image du plan $A + \text{Vect}(u, v)$ par f est un plan qui lui est parallèle, donc $\varphi(\text{Vect}(u, v)) = \text{Vect}(u, v)$, de dimension 2, en particulier $\varphi|_{\text{Vect}(u, v)}$ est bijective. De même $\varphi(\text{Vect}(u, w)) = \text{Vect}(u, w)$. On a $\text{Vect}(u) = \text{Vect}(u, v) \cap \text{Vect}(u, w)$;

$\varphi(\text{Vect}(u)) \subset \varphi(\text{Vect}(u, v)) \cap \varphi(\text{Vect}(u, w)) = \text{Vect}(u, v) \cap \text{Vect}(u, w) = \text{Vect}(u)$. Enfin $\varphi(u) \neq 0$ puisque

$\varphi|_{\text{Vect}(u, v)}$ est bijective et $u \neq 0$. Conclusion $\varphi(\text{Vect}(u)) = \text{Vect}(u)$ donc $f(A + \text{Vect}(u)) = f(A) + \varphi(\text{Vect}(u))$ est une droite parallèle à $A + \text{Vect}(u)$

Ex 1a $h_1(z) = z + i - 1; h_2(z) = -\frac{1}{2}z + 1 - i$. h_2 est explicitement la translation de vecteur $i - 1$. On cherche

le point fixe de $h_2: -\frac{1}{2}z + 1 - i = z \Leftrightarrow \frac{3}{2}z = 1 - i \Leftrightarrow z = \frac{2}{3}(1 - i)$

$h_2(\frac{2}{3}(1 - i) + z) = \frac{2}{3}(1 - i) - \frac{1}{2}z$. On reconnaît l'homothétie de centre $\frac{2}{3}(1 - i)$ de rapport $-\frac{1}{2}$

l'homothétie de centre $-1 - i$ de rapport 2 alors $h(-1 - i + z) = -1 - i + 2z$

Posons $Z = -1 - i + z$ (chgt de variable) $\Leftrightarrow z = Z + 1 + i$ alors $h(Z) = -1 - i + 2Z + 2(1 + i) = 2Z + 1 + i$

On a $h_1 \circ h_2(z) = (-\frac{1}{2}z + 1 - i) + i - 1 = -\frac{1}{2}z$; $h_2 \circ h_1(z) = -\frac{1}{2}(z + i - 1) + 1 - i = -\frac{1}{2}z + \frac{3}{2}(1 - i) \neq h_1 \circ h_2(z)$

Ex1b) $s_{z_0}(z_0+z) = z_0 - z$ donc $s_{z_0}(z) = -z + 2z_0, z \in \mathbb{C}$

$s_{z_0} \circ s_{z_1}(z) = s_{z_0}(-z + 2z_1) = z - 2z_1 + 2z_0$ translation de z de vecteur $2(z_0 - z_1)$

La composée de deux translations $z \mapsto z+u$ et $z \mapsto z+v$ est la translation $z \mapsto z+u+v$. On en déduit que si n est impair, $s_{z_0} \circ s_{z_1} \circ \dots \circ s_{z_{n-1}} \circ s_{z_n}$ est la translation de vecteur $2(z_0 - z_1 + z_2 - z_3 + \dots)$
 $z \mapsto z + 2(z_0 - z_1)$ $z \mapsto z + 2(z_{n-1} - z_n)$ $= 2 \sum_{i=0}^{n-1} (-1)^i z_i$

Si n est pair $(s_{z_0} \circ \dots \circ s_{z_{n-1}}) \circ s_{z_n}(z) = -z + 2z_n + 2 \sum_{i=0}^{n-1} (-1)^i z_i$
 $z \mapsto z + 2 \sum_{i=0}^{n-1} (-1)^i z_i$ $= -z + 2 \sum_{i=0}^n (-1)^i z_i$

On reconnaît la symétrie centrale de centre $\sum_{i=0}^n (-1)^i z_i$

Ex2a) $A \neq B, \Omega \in \mathbb{R}^2, I = \frac{1}{2}A + \frac{1}{2}B$ milieu de $[AB]$
 On a $A\Omega^2 + B\Omega^2 = \underbrace{\|A\vec{I} + I\vec{\Omega}\|^2}_{AI^2 + I\Omega^2 + 2(A\vec{I} | I\vec{\Omega})} + \underbrace{\|B\vec{I} + I\vec{\Omega}\|^2}_{BI^2 + I\Omega^2 + 2(B\vec{I} | I\vec{\Omega})} = 2AI^2 + 2I\Omega^2 + 2 \underbrace{(A\vec{I} + B\vec{I} | I\vec{\Omega})}_{=0}$

$AB^2 = (2AI)^2 = 4AI^2$

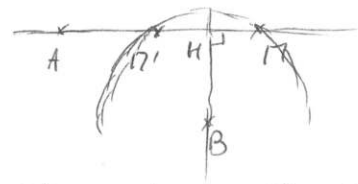
Alors $A\Omega^2 + B\Omega^2 = AB^2 \Leftrightarrow 2I\Omega^2 = 2AI^2 \Leftrightarrow I\Omega = AI \Leftrightarrow \Omega \in \mathcal{C}(I, A)$ cercle de centre I passant par A
 $= \mathcal{C}([AB])$

b) $G = \frac{1}{3}A + \frac{2}{3}B$. Comme on a on a $\frac{1}{3}A\Omega^2 + \frac{2}{3}B\Omega^2 = \frac{1}{3}AG^2 + \frac{2}{3}BG^2 + (\frac{1}{3} + \frac{2}{3})G\Omega^2 + \underbrace{(\frac{1}{3}AG + \frac{2}{3}BG | G\vec{\Omega})}_{=0}$
 $A\vec{G} = 2G\vec{B} = \frac{2}{3}A\vec{B} \rightsquigarrow \frac{1}{3}AG^2 + \frac{2}{3}BG^2 = \frac{1}{3}(\frac{4}{3} + \frac{2}{3})AB^2 = \frac{2}{3}AB^2$
 Alors $\frac{1}{3}A\Omega^2 + \frac{2}{3}B\Omega^2 = AB^2 \Leftrightarrow G\Omega^2 = AB^2 - \frac{2}{3}AB^2 = \frac{1}{3}AB^2 \Leftrightarrow G\Omega = \frac{\sqrt{3}}{3}AB$

On reconnaît l'équation d'un cercle de centre G de rayon $\frac{\sqrt{3}}{3}AB$

Ex 2c $\Pi \neq A, B$ Δ perpendiculaire à $(A\Pi)$ issue de B

$$\Pi' = s_A(\Pi)$$



Soit H l'intersection de Δ avec $(A\Pi)$. On a $\overrightarrow{H\Pi} \perp \overrightarrow{B\Pi}$, $\overrightarrow{H\Pi'} = -\overrightarrow{H\Pi}$ donc $\overrightarrow{A\Pi'} = \overrightarrow{A\Pi} - 2\overrightarrow{H\Pi} \in \text{Vect}(\overrightarrow{A\Pi}) \in \text{Vect}(\overrightarrow{A\Pi'})$ car $H \in (A\Pi)$

donc $\Pi' \in (A\Pi)$

On a $B\Pi'^2 = BH^2 + H\Pi'^2 = BH^2 + H\Pi^2 = B\Pi^2$ donc $B\Pi' = B\Pi$, $\Pi' \in \mathcal{E}(B, \Pi)$
Pythagore

Conclusion $\Pi' \in \mathcal{E}(B, \Pi) \cap (A\Pi)$

$$\mathcal{E}(B, \Pi) \cap (A\Pi) = \{\Pi'\} \Rightarrow \Pi' = \Pi \Leftrightarrow \Pi = H \Leftrightarrow \overrightarrow{A\Pi} \perp \overrightarrow{B\Pi} \Leftrightarrow A\Pi^2 + B\Pi^2 = AB^2$$

$$\text{Réciproquement } A\Pi^2 + B\Pi^2 = AB^2 \Rightarrow \overrightarrow{B\Pi} \perp \overrightarrow{A\Pi} \Rightarrow \forall \Pi' \in (A\Pi), B\Pi'^2 = B\Pi^2 + \Pi\Pi'^2 > B\Pi^2 \text{ si } \Pi \neq \Pi' \Rightarrow \mathcal{E}(B, \Pi) \cap (A\Pi) = \{\Pi'\}$$

d)



On veut construire $\Pi \in \mathcal{E}(B, C)$ tq $(A\Pi) \cap \mathcal{E}(B, C) = \{\Pi\}$ donc tq $A\Pi^2 + B\Pi^2 = AB^2$ d'après (c). D'après (a) il faut et il suffit $\Pi \in \mathcal{E}(I, B)$ avec I milieu de $[AB]$. On construit I comme l'intersection de (AB) avec la médiatrice de $[AB]$. On construit deux points distincts de la médiatrice de $[AB]$ comme les deux points d'intersection de $\mathcal{E}(A, B)$ avec $\mathcal{E}(B, A)$, bien définis si $A \neq B$

La seule chose à vérifier est que $\mathcal{E}(I, B)$ et $\mathcal{E}(B, C)$ s'intersectent. Lorsque Π décrit $\mathcal{E}(I, B)$, $B\Pi$ est minimal égal à 0 pour $\Pi = B$, maximal pour Π diamétralement opposé à B et alors $B\Pi = 2IB = AB$.

$B\Pi$ prend la valeur BC si $BC \leq AB$.

Si $BC \leq AB$ on peut construire Π tq $A\Pi^2 + B\Pi^2 = AB^2$ $(A\Pi)$ est une droite si $\Pi \neq A$ donc si $BC < AB$

Si $BC = AB$ la tangente à $\mathcal{E}(B, C)$ et la droite issue de A perpendiculaire à (AB) qu'on peut construire comme la médiatrice du segment $[B, s_A(B)]$, $s_A(B)$ étant l'intersection de (AB) avec $\mathcal{E}(A, B)$ autre que B

Ex 3 $A = (-1, 2)$, $B = (4, 2)$, $\mathcal{D}_m: y = m(x+1) + 2$ droite passant par A de pente m donc de vecteur directeur $(1, m)$

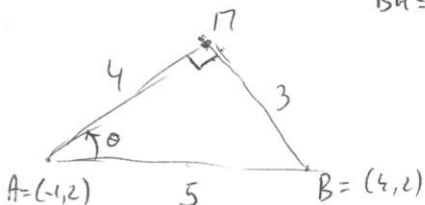
a) On cherche $H \in \mathcal{D}$ donc $x \in \mathbb{R}$ tq $H = (x, m(x+1) + 2)$ vérifie $\underbrace{(\overrightarrow{BH} | (1, m))}_0 = 0$ soit $(x-4) \times 1 + m^2(2+1) = 0$

$$\text{soit } x = \frac{m^2 - 4}{1 + m^2} = -1 + \frac{5}{1 + m^2} \quad \Rightarrow \quad H = \left(-1 + \frac{5}{1 + m^2}, \frac{5m}{1 + m^2} + 2\right), \quad \overrightarrow{BH} = \left(-5 + \frac{5}{1 + m^2}, \frac{5m}{1 + m^2}\right) = \frac{5m}{1 + m^2} (-m, 1)$$

$$BH^2 = \frac{25m^2}{(1+m^2)^2} (1+m^2) = 25 \frac{m^2}{1+m^2}$$

$$BH = 3 \Leftrightarrow 25m^2 = 9(1+m^2) \Leftrightarrow 16m^2 = 9 \Leftrightarrow 4|m| = 3 \Leftrightarrow m = \pm \frac{3}{4}$$

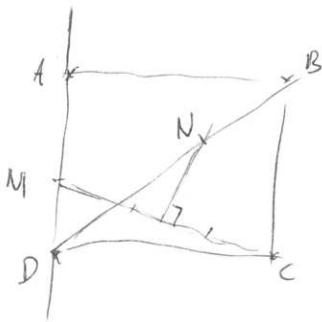
b)



$\Pi \in \mathcal{E}(A, 4) \cap \mathcal{E}(B, 3)$ alors $A\Pi^2 + B\Pi^2 = 16 + 9 = 25 = AB^2$

donc $\overrightarrow{B\Pi} \perp \overrightarrow{A\Pi}$. On cherche la pente de la droite $(A\Pi)$ par rapport à l'horizontale; c'est $\tan(\theta) = \frac{3}{4}$ si Π est au dessus de (AB) $= -\frac{3}{4}$ si Π est en dessous

Ex 4



Dans le repère (D, \vec{DC}, \vec{DA}) on a

$$D(0,0)$$

$$C(1,0)$$

$$A(0,1)$$

$$B(1,1)$$

$$N(0,x) \text{ pour un } x \in \mathbb{R}$$

$$N(y,y)$$

avec la condition $NI = NC$ (N est sur la médiatrice de $[NC]$)

$$\text{soit } \|\vec{NI}\|^2 = \|\vec{NC}\|^2$$

$$\|(-y, x-y)\|^2 = \|(1-y, -y)\|^2 \Leftrightarrow y^2 + (x-y)^2 = (1-y)^2 + y^2$$

$$\Leftrightarrow (x-y)^2 = (1-y)^2$$

$$\Leftrightarrow x-y = 1-y \text{ ou } x-y = y-1$$

$$\Leftrightarrow x=1 \text{ ou } y = \frac{1+x}{2}$$

Pour $x=1$ y est indéfini (y est quelconque) donc N est indéfini (la médiatrice est confondue avec (BD))

Pour $x \neq 1$ on a $N\left(\frac{1+x}{2}, \frac{1+x}{2}\right)$, $NI^2 + NC^2 = 2NC^2 = 2\left(\left(1 - \frac{1+x}{2}\right)^2 + \left(\frac{1+x}{2}\right)^2\right)$ d'après les calculs ci-dessus

$$= \frac{1}{2} \left((1-x)^2 + (1+x)^2 \right) = 1+x^2$$

ce qui se compare à $IC^2 = \|(1, -x)\|^2 = 1+x^2$

$NI^2 + NC^2 = IC^2 \leadsto INIC$ est rectangle en N .

L'ensemble $\left\{ \left(\frac{1+x}{2}, \frac{1+x}{2} \right), x \neq 1 \right\}$ décrit $\{(y,y), y \neq 1\}$ c'est à dire la droite (BD) privée de B

Corrige parcimonieux

Qa) $f: \mathbb{R}^p \rightarrow \mathbb{R}^q$ est affine $\Leftrightarrow \exists O \in \mathbb{R}^p, \varphi: \mathbb{R}^p \rightarrow \mathbb{R}^q$ linéaire $\forall \vec{a} \in \mathbb{R}^p, f(\vec{a}) = f(O) + \varphi(\vec{a} - O)$
 $\Leftrightarrow \exists \varphi: \mathbb{R}^p \rightarrow \mathbb{R}^q$ linéaire $\forall \vec{a}, \vec{b} \in \mathbb{R}^p, f(\vec{a}) - f(\vec{b}) = \varphi(\vec{a} - \vec{b})$

b) $f: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ bijective affine. $D = A + \text{Vect}(u)$ avec $u \neq 0$ droite $\rightarrow f(D) = \{ f(A + \lambda u), \lambda \in \mathbb{R} \}$
 φ partie linéaire de f
 $= \{ f(A) + \lambda \varphi(u), \lambda \in \mathbb{R} \}$
 $= f(A) + \text{Vect}(\varphi(u))$

f bijective $\Rightarrow f(A+u) \neq f(A) \Rightarrow \varphi(u) \neq 0$ donc $f(A) + \text{Vect}(\varphi(u))$ est une droite

$D = A + \text{Vect}(u), D' = B + \text{Vect}(v)$. $D // D' \Leftrightarrow \text{Vect}(u) = \text{Vect}(v) \Rightarrow \text{Vect}(\varphi(u)) = \text{Vect}(\varphi(v)) \Rightarrow f(D) // f(D')$

c) $f: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ affine $\forall A, u \neq 0, f(A + \text{Vect}(u))$ est une droite $\Leftrightarrow \varphi(u) \neq 0$
 $= f(A) + \text{Vect}(\varphi(u))$
 et parallèle à $A + \text{Vect}(u) \Rightarrow \text{Vect}(\varphi(u)) = \text{Vect}(u)$

Donc $\forall u \neq 0, \exists \lambda_u \in \mathbb{R}, \varphi(u) = \lambda_u u$.

Soient $u, v \neq 0$ si u et v sont colinéaires alors $\lambda_u = \lambda_v$

sinon $\varphi(u+v) = \lambda_{u+v}(u+v) = \lambda_u u + \lambda_v v$. Par unicité de l'échelle $\lambda_u = \lambda_{u+v} = \lambda_v$

$\Rightarrow \exists \lambda \in \mathbb{R}, \forall u \neq 0, \varphi(u) = \lambda u$. $\lambda \neq 0$ car $\varphi(u) \neq 0$

Si $\lambda = 1, \varphi = \text{id}$ et f est une translation (de vecteur $O f(O)$ pour $O \in \mathbb{R}^2$ fixe)

Si $\lambda \neq 1, \exists ! \vec{p}_0, f(\vec{p}_0) = M_0$ ($\Leftrightarrow \vec{p}_0 = f(O) + \varphi(\vec{p}_0 - O) \Leftrightarrow \vec{p}_0 = O f(O) + \lambda(\vec{p}_0 - O) \Leftrightarrow (1-\lambda)\vec{p}_0 = O f(O)$)

alors $f(\vec{p}) = f(\vec{p}_0) + \varphi(M_0^{-1}(\vec{p} - \vec{p}_0)) = M_0 + \lambda M_0^{-1}(\vec{p} - \vec{p}_0) \sim f =$ homothétie de centre \vec{p}_0 de rapport λ

d) Soit $D = A + \text{Vect}(u)$ droite de \mathbb{R}^3 . $\exists \mathcal{P}, \mathcal{P}'$ plans $\forall \mathcal{D} = \mathcal{P} \cap \mathcal{P}'$ (Soient $v, w \in \mathbb{R}^3$ $\forall (u, v, w)$ base de \mathbb{R}^3 .)

$\mathcal{P} = A + \text{Vect}(u, v), \mathcal{P}' = A + \text{Vect}(u, w)$ convenablement

Alors $f(D) \subset \underbrace{f(\mathcal{P})}_{f(A) + \vec{v}} \cap \underbrace{f(\mathcal{P}')}_{f(A) + \vec{w}} = f(A) + \vec{v} \cap \vec{w} = f(A) + \vec{D}$.

$f(\mathcal{P})$ plan $\rightarrow f|_{\mathcal{P}}$ est injective $\rightarrow f(D)$ est une droite (sinon ce serait un point) \rightarrow l'inclusion $f(D) \subset f(A) + \vec{D}$ est une égalité

\rightarrow L'hypothèse de (c) est vérifiée (la dimension de l'espace ambiant \mathbb{R}^2 ou \mathbb{R}^3 ne joue pas de rôle)

\rightarrow même conclusion.

L2géo - session 2 - 26 juin 25

Durée 2h. Documents et matériel électronique interdit.

**Justifier raisonnablement chaque réponse. Seuls les calculs et raisonnements sont notés !
Il est toujours bien venu de faire un dessin représentatif : Même si le dessin ne sera pas considéré comme une justification, il participe à la clarté de la rédaction.**

Ex.1. $\tan(\theta)$

a. Soient \mathcal{D} et \mathcal{D}' deux droites sécantes en un point O , A, B des points de \mathcal{D} respectivement \mathcal{D}' distincts de O , A' le projeté orthogonal de A sur \mathcal{D}' et B' le projeté orthogonal de B sur \mathcal{D}' .

1 Faites un dessin.

2 Montrer sans utiliser les fonctions trigonométriques (sans utiliser les angles) qu'on a $\frac{AA'}{OA'} = \frac{BB'}{OB'}$.

b. On considère les points $A = (1, 1)$, $B = (6, 1)$ de \mathbb{R}^2 et $C = (x, y)$ caractérisé par $y > 1$, ABC est rectangle en C et $BC = 3$.

1+1.5 Déterminer la longueur AC puis, sans calcul, la pente de la droite (AC) relativement au repère habituel $((0, 0), (1, 0), (0, 1))$ de \mathbb{R}^2 . (Observer que la droite (AB) est horizontale et utiliser (a)).

1.5 Quelles sont les pentes des droites issues du point $A' = (6, -4)$ tangentes au cercle de centre B de rayon 3 ?

c. On garde $A = (1, 1)$ et on change B en $B = (5, 4)$. On considère le repère adapté (A, i, j) où $i = \frac{1}{AB}\vec{AB}$ et j est le vecteur de norme 1 tel que (i, j) soit une base orthonormée directe (directe signifie que j est obtenu de i par rotation dans le sens inverse des aiguilles d'une montre, ou encore que le déterminant de la matrice des coordonnées de (i, j) est positif.).

1 Déterminer (sans calcul) la pente relativement au repère (A, i, j) de la droite issue de A tangente au cercle de centre B de rayon 3.

1 Comment s'exprime les coordonnées (x', y') relativement au repère (A, i, j) d'un point (x, y) de \mathbb{R}^2 ?

1.5 En déduire les équations dans \mathbb{R}^2 des droite issue de A tangente au cercle de centre B de rayon 3.

Ex.2. Le carré — Soit $ABCD$ un carré (les côtés sont donc $[AB]$, $[BC]$, $[CD]$ et $[DA]$). Soit I le barycentre de $\{(A, \frac{1}{2}), (D, \frac{1}{2})\}$ (le milieu de $[AD]$) et soit J le barycentre de $\{(B, \frac{1}{2}), (A, \frac{1}{4}), (C, \frac{1}{4})\}$. On souhaite vérifier si le triangle IJC est rectangle en J , ce que semble indiquer le dessin.

1 a. Que pensez vous du raisonnement suivant :

Dans le repère (J, \vec{JI}, \vec{JC}) on a $J(0, 0), I(1, 0), C(0, 1)$. On calcule le produit scalaire $(\vec{JI}|\vec{JC}) = (1 - 0)(0 - 0) + (0 - 0)(1 - 0) = 0$ donc \vec{JI} et \vec{JC} sont orthogonaux.

2 b. Le triangle IJC est il rectangle en J ?

Ex.3. Constructions — Partant d'un ensemble de points \mathcal{P} , on lui ajoute itérativement les points d'intersection de droites passant chacune par deux points distincts de \mathcal{P} (construction à la règle), de cercles de centre un point de \mathcal{P} passant par un autre point de \mathcal{P} (construction au compas), des droites et cercles issus de points de \mathcal{P} (construction à la règle et au compas).

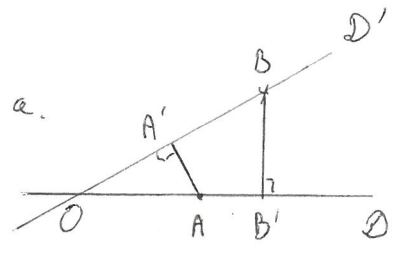
On note $\mathcal{C}(M, N)$ le cercle de centre M passant par N .

- 1 a. Soient A, B deux points distincts de \mathbb{R}^2 . Montrer soigneusement que l'ensemble des points M équidistants de A et B est la droite perpendiculaire à (AB) passant par le milieu de $[AB]$.
- 1 Observer que $\mathcal{C}(A, B) \cap \mathcal{C}(B, A)$ est formé de deux points distincts équidistants de A et B . En
- 1 déduire une construction à la règle et au compas du milieu de $[AB]$.
- 1 b. Comment peut on construire à la règle et au compas le symétrique de A par rapport à B ?
- 1 ★ Comment peut on le construire au compas seul ?
- 1 c. Soit C un point de \mathbb{R}^2 non aligné avec A, B . Montrer que le symétrique de A par rapport au milieu de $[BC]$ est le translaté de C par le vecteur \vec{AB} .
- 1 Partant de $\mathcal{P} = \{A, B, C\}$, en combien d'étapes peut on obtenir le translaté de C par le vecteur \vec{AB} à la règle et au compas ?

Compas seul

- 1 d. Soient A, B, C trois points non alignés. Montrer que $\mathcal{C}(A, C) \cap \mathcal{C}(B, C)$ est formé de C et du symétrique de C par rapport à la droite (AB) .
- 1.5 e. Soit Δ la médiatrice de $[BC]$. Montrer soigneusement que la composée $s_{\Delta} \circ s_{(BC)}$ est la symétrie centrale de centre le milieu de $[BC]$.
- 1.5 En déduire une construction au compas seul du translaté de C par le vecteur \vec{AB} . De combien d'étapes avez vous besoin ? Faites un dessin !

Ex 1 a.



Preuve analytique:
 Choisissons un vecteur directeur de D de norme 1
 v ——— D' ———
 $\exists a, b \in \mathbb{R}, A = O + av$ et $B = O + bv$

Alors $A' = O + (av|v)v = O + a(u|v)v$

$(A' \in D' \iff O + av \cdot (\vec{AA'} | \vec{v}) = 0$ se traduit par $(av - a(u|v)v) \cdot v = 0$ donc $a = a(u|v)$)

De même $B' = O + (bv|u)u = O + b(v|u)u$. On pose $\beta = (u|v) = (v|u)$

On calcule maintenant $AA'^2 = \|a\beta v - au\|^2 = a^2 (\beta^2 \|v\|^2 - 2\beta \frac{(v|u)}{\beta} + \frac{\|u\|^2}{\beta^2}) = a^2 (1 - \beta^2)$
 $OA'^2 = \|a\beta v\|^2 = a^2 \beta^2$

Donc $\frac{AA'^2}{OA'^2} = \frac{1 - \beta^2}{\beta^2}$. Le même calcul donne $BB'^2 = b^2 (1 - \beta^2)$ et $OB'^2 = b^2 \beta^2$.

On a bien $\frac{AA'^2}{OA'^2} = \frac{BB'^2}{OB'^2}$

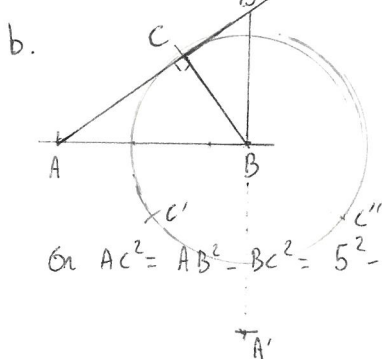
Preuve synthétique: Les rapports $\frac{AA'}{OA'}$ ne dépend pas du choix de A sur $D \setminus \{O\}$ d'après le thm de Thalès.

On peut alors choisir A tel que $OA = OB$.

Soit Δ la médiatrice de $[AB]$ et notons s_Δ la symétrie axiale par rapport à Δ . On a $s_\Delta(O) = O$ puisque $O \in \Delta$ ($OA = OB$)
 $s_\Delta(A) = B$ puis $s_\Delta(OA) = (OB) = D'$ et puisque $s_\Delta \circ s_\Delta = id$, $s_\Delta(B) = A$, $s_\Delta(D') = D$

On a $s_\Delta(A') \in D$ et $\underbrace{s_\Delta(A) s_\Delta(A')}_{B}$ $\perp D$ puisque $\vec{AA'} \perp D'$ et s_Δ préserve le produit scalaire. Donc $s_\Delta(A') = B'$

s_Δ préserve les distances donc $\frac{AA'}{OA'} = \frac{s_\Delta(A) s_\Delta(A')}{s_\Delta(O) s_\Delta(A')} = \frac{BB'}{OB'}$



Notons B' le point de la droite (AC) d'abscisse 6 (ds le repère canonique de \mathbb{R}^2)
 i.e. tel que $\vec{BB'} \perp \vec{AB}$.

La pente de la droite (AC) est $\frac{y_{B'} - y_A}{x_{B'} - x_A} = \frac{BB'}{AB} = \frac{BC}{AC}$
 On obtient $\frac{BC}{AC} = \frac{3}{4}$ d'après (a)

On $AC^2 = AB^2 - BC^2 = 5^2 - 3^2 = 4^2$ par Pythagore.

$A' = (6, -4)$ est l'image de A par la rotation de centre B d'angle $\pi/2 \rightarrow C'$ est l'image de C par cette même rotation

$\frac{x_{C'} - x_{A'}}{y_{C'} - y_{A'}} = -\frac{y_C - y_A}{x_C - x_A} = -\frac{3}{4}$ donc la pente de la droite $(A'B')$: $\frac{y_{C'} - y_{A'}}{x_{C'} - x_{A'}}$ est $-\frac{4}{3}$

L'autre tangente est la symétrique de $(A'C')$ par rapport à $(A'B)$, de pente $\frac{y_{C''} - y_{A'}}{x_{C''} - x_{A'}} = \frac{y_{C'} - y_{A'}}{x_{C'} + 2x_{A'} - x_{A'}} = \frac{4}{3}$

c. Dans le repère (A, i, j) on est comme en b puisque $AB = \sqrt{(5-1)^2 + (-4-1)^2} = 5$

On a donc une tangente de pente $\frac{3}{4}$ et sa symétrique par rapport à l'axe (A, i) , de pente $-\frac{3}{4}$

(Ex 1c) Chgt de repère $(x, y) = A + x'i + y'j$ dans \mathbb{R}^2 , où $A = (1, 1)$, $i = \frac{1}{AB} \vec{AB} = \frac{1}{5} (4, 3)$

$$\text{donc } \frac{1}{5} \begin{pmatrix} 4 & -3 \\ 3 & 4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x-1 \\ y-1 \end{pmatrix}$$

$$j = \frac{1}{5} (-3, 4)$$

Matrice orthogonale

$$\Rightarrow \begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = \frac{1}{5} \begin{pmatrix} 4 & 3 \\ -3 & 4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x-1 \\ y-1 \end{pmatrix} = \frac{1}{5} \begin{pmatrix} 4x+3y-7 \\ -3x+4y-1 \end{pmatrix}$$

Les tangentes ont pour équation $y' = \pm \frac{3}{4} x'$ dans le repère (A, i, j) , d'où les équations ds \mathbb{R}^2 :

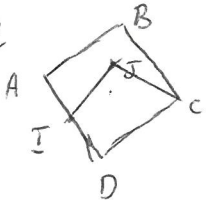
$$\frac{1}{5} (-3x+4y-1) = \frac{3}{4} \times \frac{1}{5} (4x+3y-7) \text{ soit } 6x - \frac{7}{4}y - \frac{17}{4} = 0 \text{ pour la première}$$

$$\frac{1}{5} (-3x+4y-1) = -\frac{3}{4} \times \frac{1}{5} (4x+3y-7) \text{ soit } -\frac{25}{4}y + \frac{25}{4} = 0 \text{ soit } y=1 \text{ pour la seconde}$$

Partenance? ~~La~~ La droite d'eq $y=1$ (horizontale) est bien tangente au cercle de centre $(5, 4)$ de rayon 3 (tangente au point $(5, 1)$).

Et

Ex 2



$$I = \frac{1}{2}A + \frac{1}{2}D, \quad J = \frac{1}{2}B + \frac{1}{4}A + \frac{1}{4}C$$

a) Dans le repère (J, \vec{JI}, \vec{JC}) (après avoir vérifié que c'est bien un repère du plan euclidien), si

$$u = x\vec{JI} + y\vec{JC}, \quad v = z\vec{JI} + t\vec{JC} \text{ alors } (u|v) = xz\|\vec{JI}\|^2 + yt\|\vec{JC}\|^2 + (x+t+yz)(\vec{JI}|\vec{JC})$$

$$= xz + yt \text{ seulement si } \|\vec{JI}\| = \|\vec{JC}\| = 1 \text{ et } (\vec{JI}|\vec{JC}) = 0$$

autrement dit si (\vec{JI}, \vec{JC}) est une base orthonormée. Or on ne sait pas encore qu'elle est orthogonale. Le raisonnement n'est pas correct

b) La question est manquante ds le sujet imprimé: IJC est-il rectangle en J?

On se place dans le repère (A, \vec{AB}, \vec{AD}) qui est orthogonal et $\|\vec{AB}\| = \|\vec{AD}\|$ puisque ABCD est un carré

$$\text{Posons } a = \|\vec{AB}\|. \text{ On a } I = \frac{1}{2}A + \frac{1}{2}D = A + \frac{1}{2}\vec{AD}$$

$$J = \frac{1}{2}B + \frac{1}{4}A + \frac{1}{4}C = A + \frac{1}{2}\vec{AB} + \frac{1}{4}\frac{\vec{AC}}{\vec{AB} + \vec{AD}} = A + \frac{3}{4}\vec{AB} + \frac{1}{4}\vec{AD}$$

$$\vec{IJ} = \frac{3}{4}\vec{AB} - \frac{1}{4}\vec{AD}, \quad \vec{JC} = \vec{AB} + \vec{AD} - \frac{3}{4}\vec{AB} - \frac{1}{4}\vec{AD} = \frac{1}{4}\vec{AB} + \frac{3}{4}\vec{AD}$$

$$\text{Finalement } (\vec{IJ}|\vec{JC}) = \left(\frac{3}{4} \times \frac{1}{4} - \frac{1}{4} \times \frac{3}{4}\right) a^2 = 0 \text{ On sait que oui IJC est rectangle en J.}$$

Soit I le milieu de $[AB]$

Ex3 a) $IA = IB \Leftrightarrow \|\vec{IA}\|^2 = \|\vec{IB}\|^2$

$$IA^2 + IB^2 + 2(\vec{IA} | \vec{IB})$$

$$IA^2 + IB^2 + 2(\vec{IA} | \vec{IB})$$

$\Leftrightarrow (\vec{IA} | \vec{IB}) = (\vec{IA} | \vec{IB})$ (car $IA = IB$)

$\Leftrightarrow (\vec{IA} | \vec{AB}) = 0$

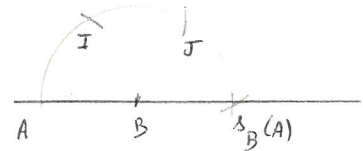
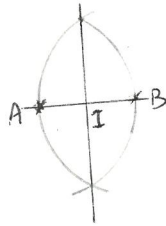
L'ensemble des I solution est la droite passant par I de direction \vec{AB}^\perp

$E(A,B) \cap E(B,A) = \{I, IA = IB = AB\}$
 $= \{I \in \text{Med}([AB]), IA^2 + IB^2 = AB^2\}$ Ce sont les deux points de la médiatrice
 $\frac{1}{4} AB^2$

à distance $\frac{\sqrt{3}}{2} AB$ de I .

Ces deux points sont distincts donc déterminent la médiatrice. L'intersection de la médiatrice avec

(AB) est le point I milieu de $[AB]$



b) $s_B(A)$ est le pt d'intersection de (AB) avec $E(B,A)$ autre que A

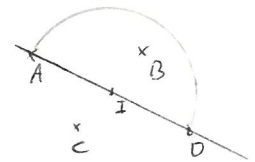
Au compas seul on construit $I \in E(B,A) \cap E(A,B)$

$J \in E(B,A) \cap E(I,A)$ autre que A

et $s_B(A) \in E(B,A) \cap E(J,I)$

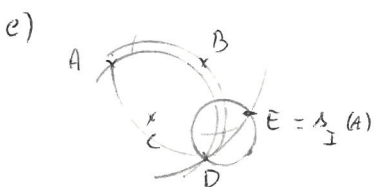
En effet J est l'image de A par la rotation r de centre B d'angle $-\pi/3$ (pour une orientation compatible avec le choix de I), J est l'image de I par cette même rotation ; $s_B(A)$ est l'image de J par cette rotation puisque la composée $r \circ s_B$ est la symétrie centrale s_B .

c) C'est une propriété du parallélogramme : $C + \vec{AB} = C + B - A$
 $= A + \vec{AC} + \vec{AB}$
 $= A + 2\vec{AI} = s_I(A)$



On obtient I en 4 étapes (4 traces) d'après (a) puis $s_I(A)$ en deux étapes (2 traces)

d) On a clairement $C \in E(A,C) \cap E(B,C)$. $s_{(AB)}$, symétrie par rapport à la droite (AB) , laisse invariant $E(A,C)$ et $E(B,C)$ donc $s_{(AB)}(C) \in E(A,B) \cap E(B,C)$ et $s_{(AB)}(C) \neq C$ puisque $C \notin (AB)$. $s_{(AB)}(C)$ est donc l'autre point d'intersection.



Soit I le milieu de $[BC]$, i vecteur directeur de (BC) de norme 1

(I, i, j) est un repère orthonormal. Ds ce repère $s_{(BC)}(x,y) = (x, -y)$, $s_B(x,y) = (-x, y)$
 donc $s_X \circ s_{BC}(x,y) = (-x, y)$ Autrement dit $s_B \circ s_{(BC)} = s_I$
 6 étapes.