L2jeux - TD 1 - Recherche d'équilibres - 5-12nov24

Version du 11 nov 24 - F-X. Dehon

Notions pour la première feuille, à re-exposer : Stratégies - matrice des gains ou paiements (forme normale du jeu), choix - regret après coup - meilleure réponse, équilibre [de Nash], stratégie dominante - dominée, stratégie prudente - gain garanti optimal.

1. Raisonnement sur la notion d'équilibre

Ex.1.1 a. Montrer qu'un jeu à deux joueurs où l'un des joueurs a une stratégie dominante au sens large admet un équilibre.
b. Construire un jeu à deux joueurs sans équilibre
c. Construire un jeu avec deux joueurs et exactement un équilibre qui n'est ni prudent ni pareto optimal.
d. On considère un jeu à deux joueurs à somme nulle ($g_2 = -g_1$). Le joueur 1 ne choisit pas une stratégie prudente. Peut on prédire que l'un des joueurs regrètera son choix à l'issue du jeux ? Peut t-on dire lequel sans plus d'information ?
e. Montrer que tout jeu à deux joueurs se ramène à (a les mêmes équilibres que) un certain jeu à trois joueurs à somme nulle. Les équilibres d'un jeu à trois joueurs à somme nulle sont ils nécessairement prudent pour chacun des joueurs ?

2. Recherche d'équilibres sur des exemples

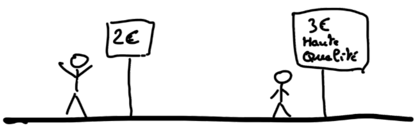
Ex.2.1 *Le dilemme des prisonniers* — Deux suspects sont arrêtés et interrogés séparément. Si aucun n'avoue ils sont condamnés tous deux à une peine d'un an pour un délit avéré mineur. Si l'un dénonce l'autre et n'est pas dénoncé il est libéré et l'autre est condamné à dix ans de prison. Si tous deux dénoncent l'autre ils ont une remise partielle de peine et sont condamnés à cinq ans de prison.

Ecrire la matrice des paiements. Y a t-il des stratégies strictement dominantes, strictement dominées ? Y a t-il un équilibre ? Est il pareto-optimal ? Qu'en conclure ?

Voir le dilemme du prisonnier dans la collection Voyage au pays des maths sur arte.tv
https://www.arte.tv/fr/videos/097454-006-A/voyages-au-pays-des-maths/

Ex.2.2 *Bluff, cf le film "La fureur de vivre"* — Deux jeunes roulent en voiture à toute allure l'un vers l'autre jusqu'à ce que l'un des deux dévie de la route avant l'autre (ou pas). Leur "gain" à l'issue du jeu peut être quantifié comme suit : s'ils dévient, le gain est 1 pour chacun. Si l'un dévie mais pas l'autre, son gain est -1 alors que l'autre gagne 4. Si aucun des deux ne dévie c'est l'accident, le gain est -4 pour chacun.
Les équilibres du jeu sont ils prudents pour chacun des joueurs ?

Ex.2.3 *int1-ex3-oct2011* — Deux marchands de glace se partagent une clientèle de 100 vacanciers (chaque vacancier achète exactement
une glace). Les marchands ont les mêmes charges : 1 euro par glace vendue. Ils choisissent indépendamment
leur prix de vente : soit 1 soit 2 soit 3 euros et font alors un bénéfice par glace vendue de 0 ou 1 ou 2 euros
respectivement. Les vacanciers choisissent tous le marchand le moins cher. Si les deux marchands affichent le même prix, la moitié des vacanciers choisira le premier marchand, l'autre moitié le second.



a. Donner la forme normale du jeu. Y a t-il des strartégies dominantes ou dominées pour l'un des joueurs ?
b. Quelle est la meilleure réponse du second marchand si le premier choisit de vendre ses glaces 3 euros ? Qu'en est il si le premier marchand choisit de vendre ses glaces 2 euros ?
c. Quels sont les équilibres du jeu ?
d. Répondre à ces mêmes questions pour une charge de 0.3€ par glace vendue puis pour trois marchands au lieu de deux.

Ex.2.4 Deux marchands se partagent une clientelle uniformément répartie sur une plage de longueur 1 en choisissant
leurs positions, respectivement x et y dans $[0, 1]$, les clients allant au marchand le plus proche. Le gain de

chacun des marchands est proportionnel à la part de clientelle captée, de sorte que la somme des gains des deux marchands est indépendante de x et de y. Si $x = y$ les gains des deux marchands sont égaux.

Quelle est la forme normale du jeu ? Y a t-il une meilleure réponse du marchand 2 si le marchand 1 choisit $x < \frac{1}{2}$?
Le jeu admet il un équilibre ? Y a t-il parmis les stratégies du marchand 1 des stratégies dominées ?

Ex.2.5 Tic tac toe commencé. C'est à o de jouer. Y a t-il une stratégie gagnante pour l'un des joueurs ? Et si c'est à x de jouer ?

★ Une stratégie gagnante est elle une stratégie dominante ? Et une stratégie garantissant une partie nulle ?
Comment s'interprète l'existence d'un équilibre en terme de victoire ou de partie nulle ?

Pistes : - Donner la forme normale du jeu dans un ou des états plus avancés du jeu.
- Raisonner en terme de stratégies prudentes d'un jeu à somme nulle

Ex.2.6 On considère le jeu à deux joueurs à somme nulle ($g_2 = -g_1$) où g_1 est donné par la matrice

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 1 \\ v & 2 \end{pmatrix}$$

Discuter des équilibres en fonction de v.

Ex.2.7★ On considère le jeu sous forme normale $X = Y = [0,1]$, $g_1(x,y) = -g_2(x,y) = y(1 - \frac{1}{3}(y - x - \frac{1}{2})^2)$.

a. Montrer que le joueur 2 admet une stratgie dominante mais pas le joueur 1.

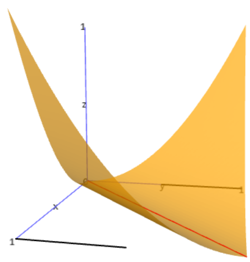
Indications : On peut déterminer le tableau de variation de l'application $y \mapsto g_2(x,y)$ en fonction de x : la dérivée de $g_2(x,y)$ par rapport à y est un trinôme du second degré en y donc on saura en déterminer le tableau de signes, mais c'est fastidieux.
Alternative oportuniste : donner un encadrement de $1 - \frac{1}{3}(y - x - \frac{1}{2})^2$ pour $x, y \in [0,1]$.

b. Quelles sont les équilibres du jeu ?

Ex.2.8 a. On considère le jeu sous forme normale $X = Y = [0,1]$, $g_1(x,y) = -g_2(x,y) = (x-y)^2$.

Dessiner dans un même repère les graphes $\{(x,y) \in [0,1]^2,\ y \text{ est une meilleure réponse de J2 à } x\}$ et $\{(x,y) \in [0,1]^2,\ x \text{ est une meilleure réponse de J1 à } y\}$.

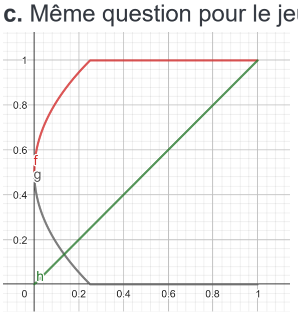
Quel lien y a t-il entre les morceaux de courbe déssinées et les graphes dans $\mathbb{R}^3$ des applications g_1 et g_2 ?



Y a t-il un équilibre ?

b. Le cours indique que si les ensembles de stratégies X, Y sont des parties fermées bornées convexes et si les correspondances de meilleures réponses $x \mapsto Y(x)$ et $y \mapsto X(y)$ sont à valeurs convexes et de graphe fermé alors le jeu admet au moins un point fixe. Quelle hypothèse est mise en défaut dans (a) ?

c. Même question pour le jeu $X = Y = [0,1]$, $g_1(x,y) = 1 - ((x - \frac{1}{2})^2 - y)^2$, $g_2(x,y) = 1 - (y-x)^2$.



L2jeux - TD 2 - Forme extensive, jeux à somme nulle - 12-19nov24

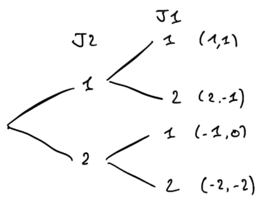
Version du 11 nov 24 - F-X. Dehon

Notions pour la deuxième feuille, à re-exposer : Forme extensive (arbre) - forme normale d'un jeu séquentiel, jeu à deux joueurs à somme nulle, stratégie prudente, gain garanti optimal - majoration optimale de la perte - valeur du jeu - point selle, stratégies pures - stratégies mixtes - stratégie pure dominée dans l'extension mixte du jeu.

1. Critique de la notion d'équilibre

Ex.1.1.a. Deux joueurs jouent suivant la matrice de paiement suivante (J1 choisit la ligne, J2 la colonne)
$\begin{pmatrix} (1,1) & (-1,0) \\ (2,-1) & (-2,-2) \end{pmatrix}$
Observer que la 1ère stratégie de J2 est strictement dominante. Quel est l'équilibre du jeu ? L'équilibre est il changé si J2 joue aléatoirement ses stratégies 1 ou 2 suivant une probabilité q de jouer 1 ?

b. *Le fait accompli* — Le joueur 2 pense qu'il obtiendrait un meilleur gain s'il annonçait à J1 en avance jouer sa stratégie 2. Quelle est la forme normale du jeu lorsque J2 annonce son choix puis J1 choisit en fonction, selon les paiements de (a) ?
On pourra commencer par expliciter l'arbre de décision du jeu.



Quels sont les équilibres de ce nouveau jeu ?

c. A son tour J1 n'est pas satisfait de la tournure que prend le jeu. Il décide et annonce qu'il n'écoutera pas l'annonce de J1. Qu'est ce que cela change à la forme du jeu en (b) ?

Ex.1.2 *Vie de couple* — **a.** Paul et Jacqueline vont chacun à l'un de leurs deux lieux habituels de distraction : l'opéra ou le théatre. Paul a une préférence pour l'opéra, Jacqueline pour le théatre. Paul, tout comme Jacqueline,
note 0 sa satisfaction s'il ne se retrouve pas avec sa compagne, 1 s'il se retrouve avec sa compagne mais pas dans son lieu préféré, 2 s'il se retrouve avec sa compagne dans son lieu préféré.

Donnez la forme matricielle du jeu. Le jeu admet il un équilibre ?

b. Paul choisit de répartir sa fréquentation entre l'opéra et le théatre comme suit : il choisit une fois pour toute un nombre $p \in [0,1]$ puis décide de son lieu de sortie en tirant au hasard un nombre entre 0 et 1 (avec la touche ran# de sa vieille calculatrice par exemple). Si ce nombre est plus petit que p il ira à l'opéra ; sinon il ira au
théatre. Jacqueline adopte la même procédure avec un nombre q ∈ [0, 1] choisi une fois pour toute par elle-même.

Quelles sont les satisfactions moyennes (après un grand nombre de semaines) de Paul et de Jacqueline en fonction
de p et q ?
Quelle est la ou les meilleure(s) réponse(s) de Paul, en terme de choix de p, au choix par Jacqueline de q ? (i.e.
q étant fixé, quels p donnent à Paul la meilleure satisfaction moyenne ?)
Quelle est la ou les meilleure(s) réponse(s) de Jacqueline au choix par Paul de p ?
Représentez sur un même dessin les ensembles $\{(p, \text{meilleure rép. à } p), p \in [0,1]\}$ et $\{(\text{meilleure rép. à } q, q), q \in [0,1]\}$. En déduire les équilibres du jeu.
Le ou les équilibres procurent ils à Paul et Jacqueline une satisfaction optimale ?

Ex.1.3 "Pierre-papier-ciseaux" biaisé.
Deux enfants jouent à "pierre-papier-ciseaux".
Le plus jeune enfant peine à faire le ciseaux avec sa main et laisse transparaître ce choix à son adversaire, ce dont il a conscience.

Modéliser cette situation par un jeu sous forme extensive. Y a t-il un choix dominant ou dominé pour l'un des joueurs ?

Si le plus jeune enfant ne se rend pas compte qu'il ne cache pas bien son jeu, le jeu reste t-il à information complète ? Comment tenir compte que les deux enfants ne jouent pas tout à fait au même jeu pour la recherche d'un éventuel équilibre ?

2. Raisonnement sur la notion d'équilibre

Ex.2.1 a. Montrer qu'un jeu à deux joueurs où la somme des gains des deux joueurs est indépendante des stratégies choisies se ramène à (a les mêmes équilibres que) un certain jeu à deux joueurs à somme nulle.
b. Montrer qu'un équilibre d'un jeu à deux joueurs à somme nulle est forcément formé d'un couple de stratégies prudentes.
Inversement un couple de stratégies prudentes d'un jeu à deux joueurs à somme nulle est il focément un équilibre ? Montrer que la réponse est oui si le jeu admet au moins un équilibre.

Ex.2.2. On considère un jeu à deux joueurs à somme nulle. On suppose que les gains garantis optimaux des joueur 1 et 2 valent respectivement -2 et 0.
A l'issue du jeu le joueur 1 obtient le gain -3. Peut on conclure que le joueur 1 regrette ou pas son choix de stratégie ? Et pour le joueur 2 ? Expliquez !
Qu’en est il si le joueur 1 obtient le gain -2 ?

Ex.2.3 *int2-ex1-dec2011* — On considère un jeu à deux joueurs à somme nulle (X, Y, g : X × Y → R) (X est l’ensemble des stratégies du joueur 1, Y est l’ensemble des stratégies du joueur 2, g la fonction de paiement du joueur 1). On note $\underline{g_1}$ et $\underline{g_2}$ les gains garantis optimaux des joueurs 1 et 2 respectivement.
Le joueur 1 choisit une stratégie x et le joueur 2 une stratégie y. Dans chacune des situations suivantes indiquez si on peut conclure que le joueur 1 regrette ou au contraire ne regrette pas son choix. Expliquez
a) $\underline{g_1}$ = 0, $\underline{g_2}$ = -1, g(x, y) = 0.5
b) $\underline{g_1}$ = 0, $\underline{g_2}$ = -1, g(x, y) = 0
c) $\underline{g_1}$ = 0, $\underline{g_2}$ = -1, g(x, y) = 1
d) $\underline{g_1}$ = 0, $\underline{g_2}$ = 0, g(x, y) = 0
e) $\underline{g_1}$ = 0, $\underline{g_2}$ = 0, g(x, y) = -1

3. Recherche d'équilibres sur des exemples

Ex.3.1 Soit le jeu à deux joueurs à somme nulle de matrice de paiement

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 & 2 & 5 & 7 \\ 3 & -4 & -2 & 5 & 1 & 3 \\ 2 & -1 & -1 & -3 & 4 & 2 \\ -3 & 1 & 1 & -2 & 0 & 3 \\ 3 & 1 & 1 & 2 & 5 & 3 \end{pmatrix}$$

De combien de stratégies disposent les joueurs 1 et 2 ? Quel est le gain du joueur 1 s’il joue la stratégie 3 et si le joueur 2 joue la stratégie 4 ? Quel est le gain du joueur 2 pour ce même couple de stratégies ?

Indiquer pour chaque stratégie du joueur 2 les meilleures réponses du joueur 1 et pour chacune de ces meilleures réponses les meilleures réponses du joueur 2. Qu’en déduit on en terme d’équilibre du jeu ?

Ex.3.2 On considère le jeu à deux joueurs de matrice de paiement suivante (on indique en ligne i colonne j le couple (gain de J1, gain de J2) relatif au choix par J1 de sa stratégie i et au choix par J2 de sa stratégie j) :

$$\begin{pmatrix} (2a-1, 1-2a) & (1,-1) \\ (a^2, -a^2) & (a, -a) \\ (1,-1) & (2a^2, -2a^2) \end{pmatrix}$$

où $a \in \mathbb{R}$ est un paramètre.

Le jeu est il à somme nulle ?
Les équilibres du jeux sont ils toujours prudents pour chacun des joueurs ?
Pour quelles valeurs de a la stratégie 1 du joueur 1 est elle strictement dominée ?
Pour quelles valeurs de a la stratégie 2 du joueur 1 est elle prudente ?
Pour quelles valeurs de a la stratégie 1 du joueur 2 est elle prudente ?
Pour quelles valeurs de a le couple de stratégie (2, 1) est il un équilibre du jeu ?

Ex.3.3 Pour les jeux suivants indiquer les stratégies prudentes de chaque joueur. Si chacun des joueurs jouent prudemment, regrettent ils a posteriori leur choix ?
$\begin{pmatrix} a & a^2 \\ 1 & -2 \end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix} 1 & 2 & a \\ a & 4 & 3 \end{pmatrix}$ en fonction de a.

Ex.3.4 On considère le jeu à deux joueurs à somme nulle donné par $X = Y = [\frac{1}{2}, 2]$; $g(x,y) = \frac{1}{x+y} + 2xy$ (gain du joueur 1).
Quelles sont les stratégies strictement dominées des joueurs 1 et 2 ?
Le jeu admet il une valeur ? Si oui que vaut elle ?

Cours 4 - stratégies mixtes - 20nov24

Version du 21nov24 — F-X. Dehon

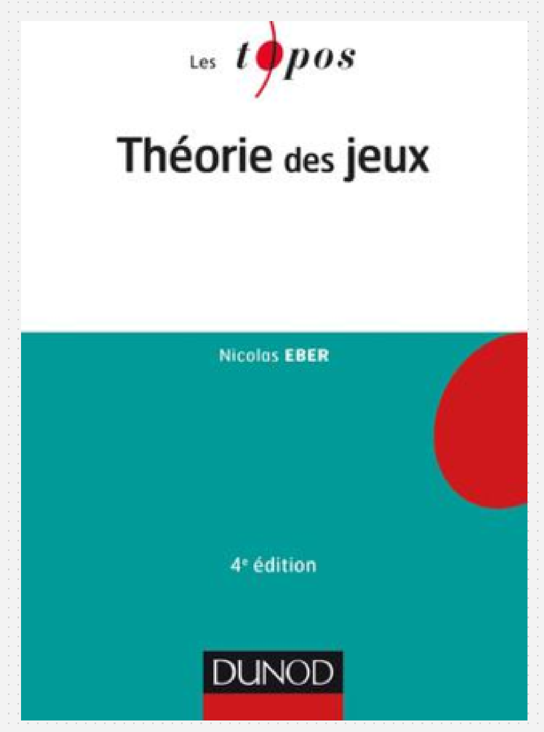
- 0. Notions
- I. Observations expérimentales rapportées dans [N. Eber, Théorie des Jeux, 2018] et critiques
    - I.1. Tirs au but (football) : équilibre de la stratégie mixte réellement mise en oeuvre
    - I.2. Aversion au risque de défaillance de l'autre joueur
    - I.3. Défaillance des autres anticipée
- II. Existence, recherche d'un équilibre
    - II.1. Recherche pour un jeu quelconque : intersection des graphes de meilleures réponses des joueurs
    - II.2. Recherche des équilibres en stratégies mixtes pour un jeu fini à deux joueurs à somme nulle
        - II.2.1. Maximisation (ou minimisation) des fonctions affines, des fonctions affines par morceaux
        - II.2.2. Exemple de calculs d'équilibres en stratégies mixtes

0. Notions

Stratégies mixtes : les différentes stratégies initiales sont jouées aléatoirement suivant une **distribution de probabilité**.
Le joueur choisit la distribution de probabilité puis s'en remet à un générateur aléatoire (un dé ou une extension de ce concept) pour tirer au sort un choix de stratégie selon la distribution choisie.
Le gain à l'issue du jeu devient une variable aléatoire ; on en retient l'espérance (la **moyenne des gains** pour chaque couple de stratégies pondérés par la probabilité qu'un tel couple soit joué). Les joueurs ont maintenant pour objectif de maximiser leur espérance de gain.

L'espérance de gain **s'interprète** de façon :
- probabiliste (le pari de Pascal)
- statistique pour une large population de joueurs
- statistique pour un grand nombre de répétition du jeu pour un même joueur (par exemple Pierre-papier-ciseaux)

I. Observations expérimentales rapportées dans [N. Eber, Théorie des Jeux, 2018] et critiques



[Disponible en ligne via le site de la BU]

I.1. Tirs au but (football) : équilibre de la stratégie mixte réellement mise en oeuvre

Il s'agit d'un jeu à deux joueurs à somme constante (⇔ nulle). Les équilibres sont plus naturels.

[Eber p26-29]

Le même type d'étude a été mené sur les *penalties* au football par Chiappori, Levitt et Groseclose [2002] et par Palacios-Huerta [2003]. Comme le service au tennis, le penalty au football est une situation simple d'interaction stratégique entre deux joueurs (le tireur et le gardien) ayant les caractéristiques d'un jeu à somme constante. Considérons, de manière symétrique au tennis, que les deux joueurs aient deux stratégies. Le tireur peut choisir de tirer sur sa droite (D) ou sur sa gauche (G). Compte tenu de la force de frappe du tireur, le ballon met environ 3 dixièmes de seconde pour arriver sur la ligne de but ! Par conséquent, le gardien doit anticiper un tir à droite (D) ou un tir à gauche (G). Autrement dit, il s'agit bien d'un jeu simultané, les deux joueurs ignorant le choix de l'autre au moment de faire le leur. La figure 1.3 résume les choix des deux joueurs.

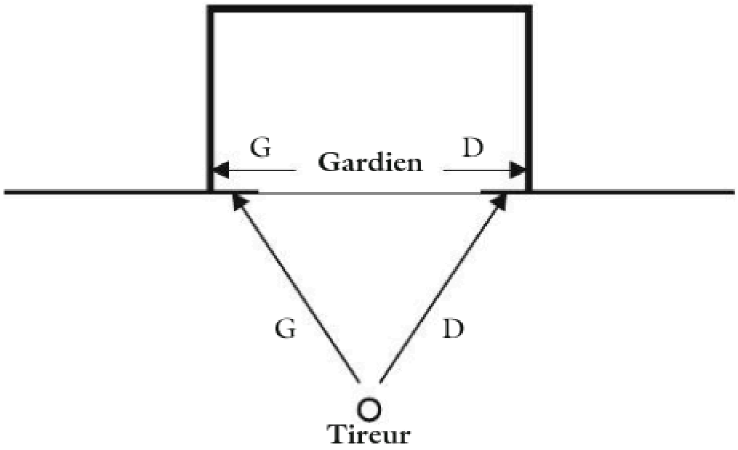


Figure 1.3 – **Le jeu du penalty**

Dans ce jeu à somme constante, le gain du tireur correspond à la probabilité d'inscrire le but alors que celui du gardien est simplement la probabilité complémentaire, c'est-à-dire la probabilité que le tireur échoue. Sur la base des 1 417 tirs de penalty analysés par Palacios-Huerta [2003], les valeurs des gains sont celles présentées dans le tableau suivant :

		Gardien	
		G	**D**
Tireur	**G**	58.30, 41.70	94.97, 5.03
	D	92.91, 7.09	69.92, 30.08

Dans chaque case, le premier chiffre correspond au gain du tireur (c'est-à-dire la probabilité, en %, qu'il marque) et le second au gain du gardien (la probabilité complémentaire).

Déterminons l'unique équilibre de Nash en stratégies mixtes de ce jeu. Appelons T_G la probabilité à l'équilibre que le tireur tire à gauche, T_D la probabilité d'équilibre qu'il tire à droite, G_G la probabilité à l'équilibre que le gardien plonge à gauche et G_D la probabilité d'équilibre que le gardien plonge à droite. L'unique équilibre en stratégies mixtes est caractérisé par :

$$T_G = 0.39,\ T_D = 0.61,\ G_G = 0.42 \text{ et } G_D = 0.58.$$

Les données de Palacios-Huerta concernent 1 417 *penalties* tirés dans des matches de championnats espagnols, italiens ou anglais. Le tableau suivant compare, au niveau agrégé, les stratégies observées avec les prédictions théoriques :

	Tireur		Gardien	
	G (%)	D (%)	G (%)	D (%)
Équilibre de Nash	38,54	61,46	41,99	58,01
Observations	39,98	60,02	42,31	57,69

Source : Palacios-Huerta [2003, p. 402].

Ce tableau montre que les observations sont très proches des prédictions théoriques. Ainsi, l'équilibre en stratégies mixtes s'avère être un bon modèle prédictif des stratégies effectivement adoptées par les tireurs et les gardiens.

Pour un joueur donné, le concept de stratégies mixtes implique qu'il doit avoir le même taux de réussite sur les deux stratégies pures. Prenons le cas de Zinédine Zidane. Sur 40 *penalties* observés, il a tiré 19 fois à gauche (48 %) et 21 fois à droite (52 %) avec des taux de réussite quasiment identiques de 74 % et 76 %, respectivement. Ainsi, Zinédine Zidane serait-il (en plus…) un excellent théoricien des jeux ! Bien entendu, les choix stratégiques des tireurs de *penalties* ou des gardiens sont largement « inconscients » : simplement, leur immense expertise du jeu les conduit naturellement à opter pour les stratégies optimales. Comme le note Palacios-Huerta [2003, p. 406], « les résultats montrent qu'ils agissent instinctivement et intuitivement comme s'ils étaient programmés avec une grande précision pour jouer correctement ce jeu de stratégie. Cela n'est guère surprenant : après tout, leur compétence et leur instinct se sont développés sur des années, parfois des décennies, de pratique intensive du football »…

Palacios-Huerta montre également que les décisions des joueurs sont bien aléatoires et que, par conséquent, les choix présents sont indépendants des choix passés. Ainsi, et contrairement à ce qui est observé dans l'étude sur le tennis de Walker et Wooders [2001], la seconde implication de l'équilibre de Nash en stratégies mixtes (décision aléatoire) est également vérifiée.

Critique : aversion éventuelle au risque de l'aléa à court terme : minimisation de la probabilité des plus mauvais gains.

Exemple : commenter l'aversion au risque pour ce jeu :

$$\begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -10 & 20 \end{pmatrix}$$

$\rightsquigarrow$ utillité $\neq$ gain espéré.

I.2. Aversion au risque de défaillance de l'autre joueur

[Eber p13,18-19]

		Joueur 2 (« votre partenaire »)	
		Noir (N)	Rouge (R)
Joueur 1 (« vous »)	Noir (N)	7, 3	7, 4
	Rouge (R)	3, 4	10, 5

Par rapport aux observations expérimentales (environ 70 % des joueurs 1 choisissent la stratégie R), on notera que l'équilibre de Nash correspond bien à la façon dont la majorité des individus se comporte face au jeu 1. Comment peut-on alors interpréter le comportement des 30 % de joueurs 1 optant pour la stratégie N? Doit-on considérer leur comportement comme irrationnel ? Certainement pas. En fait, les sujets en question ne sont généralement pas irrationnels, mais n'ont simplement pas confiance dans la rationalité de l'autre joueur. Ils comprennent que, s'il est rationnel, le joueur 2 doit jouer sa stratégie dominante R (et n'a aucun intérêt à jouer N), mais ils comprennent également que la stratégie N est une stratégie sans risque pour eux, leur assurant un gain de 7 points, quelle que soit la stratégie adoptée par leur partenaire. Ils savent, par contre, qu'en jouant R, ils s'exposent au risque de voir le joueur 2 « faillir à sa rationalité » et jouer N (parce qu'il est irrationnel, parce qu'il

n'a pas compris le jeu, parce qu'il veut « embêter » le joueur 1 et/ou l'expérimentateur, etc.). Les 30 % de joueurs 1 choisissant N n'ont apparemment pas confiance dans la rationalité de l'autre joueur et préfèrent opter pour la sécurité avec la stratégie N. D'ailleurs, sans surprise, les sujets choisissant N deviennent largement majoritaires lorsque, dans la version « monétaire » du jeu 1 (*payoffs* en euros et non plus en points), leur gain certain en optant pour N passe de 7 à 9,5 et/ou leur gain dans la configuration la plus défavorable (R, N) passe de 3 à 0, l'équilibre de Nash restant le même, à savoir (R, R). En fait, un tel comportement, particulièrement fin puisqu'intégrant des anticipations sur le degré de rationalité du partenaire, est d'une certaine manière trop subtil pour être pris en compte par le concept d'équilibre de Nash (qui suppose une rationalité absolue de tous les joueurs, connue et reconnue de tous). Cela suggère dès à présent certaines limites importantes quant à la capacité prédictive du concept, limites confirmées, de manière encore plus nette, dans le chapitre 5.

⇝ utillité ≠ gain espéré.

I.3. Défaillance des autres anticipée

[Eber p91-93]

Le concours de beauté

Jeu 17

Vous jouez avec plusieurs personnes ne pouvant pas communiquer. Chaque joueur doit choisir un nombre entre 0 et 100. Le vainqueur du jeu est la personne dont le nombre est le plus proche de la moitié de la moyenne de tous les nombres choisis.
Le vainqueur recevra 10 €. En cas d'égalité, le prix est partagé équitablement entre les ex æquo.
Quel nombre choisissez-vous ?

Résultat

La moyenne des nombres annoncés se situe généralement entre 25 et 35.

Le jeu 17 a été expérimenté pour la première fois par Nagel [1995]. Dans ce jeu, l'application de la « méthode de la dominance itérée » (vue dans la section II du chapitre 1) devrait conduire tous les joueurs à annoncer 0, situation qui correspond à l'unique équilibre de Nash. Expliquons pourquoi. Dans une première étape de raisonnement, tous les joueurs doivent comprendre que la moyenne la plus élevée possible est égale à 100 (lorsque tout le monde joue 100), auquel cas la moitié de la moyenne est 50, et il doit donc être évident aux joueurs que tout nombre supérieur à 50 est une stratégie dominée. Dans une deuxième étape de raisonnement, les joueurs, ayant éliminé tous les nombres supérieurs à 50, doivent en déduire que la moyenne la plus élevée possible est maintenant 50 (si tout le monde joue 50), auquel cas il est préférable de jouer la moitié de cette moyenne, c'est-à-dire 25. Au terme de cette deuxième étape de raisonnement, tous les joueurs ont éliminé les nombres supérieurs à 25. Dans une troisième étape, la moyenne la plus élevée est donc 25 et le nombre vainqueur 12,5, ce qui doit conduire les joueurs à éliminer tous les nombres supérieurs à 12,5.

De proche en proche, on peut ainsi éliminer de manière itérative les stratégies dominées (méthode de la dominance itérée) et montrer que la seule situation « stable », c'est-à-dire dans laquelle aucun des joueurs n'a plus intérêt à changer unilatéralement de stratégie, correspond à une annonce de 0 de la part de tous les joueurs. Vérifions que cette situation constitue bien un équilibre de Nash. Si tous les joueurs annoncent 0, la moyenne des annonces est 0 et le nombre vainqueur est donc $0/2 = 0$, tous les joueurs se partageant le prix. Un joueur peut-il avoir intérêt à changer *unilatéralement* de stratégie, c'est-à-dire à ne plus jouer 0 alors que les autres continuent à le faire ? Prenons un exemple simple. Supposons qu'il y ait 10 joueurs. Étant donné que 9 joueurs jouent 0, le 10[e] joueur a-t-il intérêt à annoncer un nombre positif, par exemple 1 ? S'il joue 1, la moyenne de toutes les annonces devient $(9 \times 0 + 1 \times 1) / 10 = 0{,}1$ et le nombre vainqueur est donc $0{,}1/2 = 0{,}05$. Or, 0 est plus proche du nombre vainqueur que 1 ; autrement dit, ce sont les joueurs ayant annoncé 0 qui remportent le jeu et se partagent le prix alors que le joueur ayant « dévié » en jouant 1 est le seul perdant (c'est-à-dire le seul à ne pas recevoir une partie du prix). Aucun joueur n'a donc intérêt à changer unilatéralement de stratégie dans la situation où tout le monde annonce 0 : une annonce de 0 par tous les joueurs est bien le seul équilibre de Nash du jeu.

L'application de la méthode de la dominance itérée devrait conduire tous les joueurs à annoncer 0. Or, les résultats expérimentaux montrent que la moyenne des annonces se situe généralement aux alentours de 30. Ainsi, on observe un écart particulièrement frappant entre la solution théorique du jeu et la manière dont les individus se comportent effectivement. L'explication est très simple. Elle tient au fait que les joueurs n'appliquent pas la méthode de la dominance itérée jusqu'au bout *et/ou* anticipent que les autres joueurs ne le font pas. Il est fondamental de comprendre qu'ici, un joueur parfaitement rationnel, c'est-à-dire capable lui-même d'un raisonnement par dominance itérée infini, n'aura pas intérêt à appliquer ce raisonnement « ultra-sophistiqué ». En effet, son problème est de bien évaluer la capacité de raisonnement moyenne des autres joueurs afin d'anticiper correctement leurs choix et de gagner. Autrement dit, le problème est d'être à un niveau de raisonnement plus loin que le joueur moyen, mais surtout pas davantage !

Par ailleurs, on notera que la répétition du jeu entraîne systématiquement une diminution progressive (mais lente) des annonces (Nagel [1995]). Ainsi, un *apprentissage* semble se mettre en place, conduisant finalement les joueurs à converger vers l'équilibre de Nash au fil des répétitions.

Une variante à deux joueurs a été étudiée par Grosskopf et Nagel [2008]. Dans le cas à deux joueurs, 0 devient une *stratégie dominante* puisque c'est le nombre vainqueur *quel que soit* le choix de l'adversaire – si un joueur joue 0 et que l'autre joue $X > 0$, le premier l'emporte car 0 est toujours plus proche que X de la moitié de la moyenne, à savoir ici ½ × $X/2 = X/4$. Ainsi, dans le cas à deux joueurs, choisir une autre stratégie que 0 ne peut s'expliquer que par des capacités cognitives limitées. Or Grosskopf et Nagel obtiennent que moins de 10 % des étudiants jouent la stratégie dominante et, plus étonnant (inquiétant ?) encore, moins de 40 % des économistes professionnels optent pour cette stratégie !

Le jeu 17 est souvent appelé « **jeu du concours de beauté** », en référence à John Maynard Keynes. Keynes suggère, dans la *Théorie générale*, que le comportement des investisseurs sur les marchés financiers peut être mis en parallèle avec les concours de beauté organisés par les journaux de l'époque, dans lesquels les lecteurs devaient élire les 6 plus beaux visages parmi 100 portraits. Le vainqueur était la personne dont les préférences étaient les plus proches des préférences moyennes de tous les participants. Keynes expliquait que les lecteurs du journal, comme les investisseurs financiers, ne doivent pas choisir les visages (placements) qu'ils trouvent personnellement les plus attirants mais doivent plutôt être guidés par leurs anticipations sur les préférences (et les anticipations) des autres.

Expérimenté en cours le 20 novembre. Moyenne obtenue : 38 ; celui qui a proposé le nombre le plus proche de 17.5 a gagné !

II. Existence, recherche d'un équilibre

Théorème de Nash pour l'extension mixte d'un jeu fini (matriciel)
Généralisation (Debreu).
Théorème de Sion pour un jeu à somme nulle.

II.1. Recherche pour un jeu quelconque : intersection des graphes de meilleures réponses des joueurs

Cf cours 2

II.2. Recherche des équilibres en stratégies mixtes pour un jeu fini à deux joueurs à somme nulle

Cf [Cours-TD Théorie des jeux en L2 MASS (2008-12)]

II.2.1. Maximisation (ou minimisation) des fonctions affines, des fonctions affines par morceaux

On utilise :

1. $(q_j) \mapsto \sum_{i,j} g_{i,j} p_i q_j$ (=espérance de gain) est une fonction affine (polynomiale de degré 1). Pour une telle fonction, le min sur un domaine est atteint en un coin du domaine. On est ramené à comparer les valeurs prises en les coins.
2. $(p_i) \mapsto \min_{(q_j)}(\sum_{i,j} g_{i,j} p_i q_j) = \min_j(\sum_{i,j} g_{i,j} p_i)$ est affine par morceau. Pour une telle fonction on étudie le max sur chacun des morceaux selon l'expression affine de la fonction en ce morceau en comparant les valeurs de la fonction en les coins des morceaux puis on compare entre eux les max selon les morceaux.
3. Au bout du compte on est amené à identifier les morceaux en lesquels la fonction $(p_i) \mapsto \min_j(\sum_{i,j} g_{i,j} p_i)$ a pour expression $(p_i) \mapsto \min_j(\sum_i g_{i,j_0} p_i)$ pour un certain j_0, à déterminer les coins de ces morceaux puis à comparer les valeurs prises par l'expression $\sum_{i,j} g_{i,j} p_i$ en ces coins.

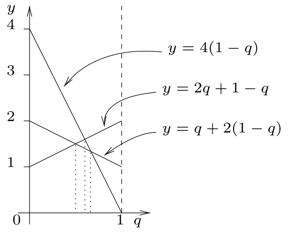
Exemple.

1. Calcul de $\min_{q\in[0,1]} G_2(q)$ où $G_2(q) = \max\{2q+1-q, q+2(1-q), 4(1-q)\}$, cf corr-f3.pdf ex.3.

On cherche donc $q \in [0,1]$ minimisant $G_2(q) := \max(2q+1-q, q+2(1-q), 4(1-q)$. On cherche d'abord les $q \in [0,1]$ pour lesquels on a une égalité.

$2q+1-q = q+2(1-q) \Leftrightarrow q = \frac{1}{2}$
$2q+1-q = 4(1-q) \Leftrightarrow q = \frac{3}{5}$
$q+2(1-q) = 4(1-q) \Leftrightarrow q = \frac{2}{3}$

On a $\frac{1}{2} < \frac{3}{5} < \frac{2}{3}$. Sur chacun des intervalles $[0, \frac{1}{2}]$, $[\frac{1}{2}, \frac{3}{5}]$, $[\frac{3}{5}, \frac{2}{3}]$, $[\frac{2}{3}, 1]$ G_2 est l'application $q \mapsto 2q+1-q$ ou $q \mapsto q+2(1-q)$ ou $q \mapsto 4(1-q)$.
Sur $[0, \frac{1}{2}]$, $G_2(q) = 4(1-q) = 4-4q$ (il suffit de comparer $2q+1-q$, $q+2(1-q)$ et $4(1-q)$ en $q=0$) donc G_2 y est décroissante.
Sur $[\frac{1}{2}, \frac{3}{5}]$, $G_2(q) = 4(1-q)$. (On compare $2q+1-q, q+2(1-q), 4(1-q)$ en $q = \frac{1}{2}$ et $q = \frac{3}{5}$.)
Sur $[\frac{3}{5}, \frac{2}{3}]$, $G_2(q) = 2q+1-q = q+1$ donc G_2 y est croissante.
Sur $[\frac{2}{3}, 1]$, $G_2(q) = 2q+1-q = q+1$ comme précédemment.



G_2 est strictement décroissante puis strictement croissante. Son min est donc atteint en $q_0 = \frac{3}{5}$.

2. Calcul de $\max_{(p_1,p_2)} G_1(p_1,p_2)$, où $G_1(p_1,p_2) = \big(\min\{4-2p_1, 4p_1+2, 3p_1+p_2+2, -6p_1+2p_2+6\}\big)$, sur le domaine formé des couples (p_1,p_2) de nombres positifs de somme ≤ 1 (cf c3.pdf p6-8 *"Un deuxième exemple"*) :

G_1 est affine par morceaux sur un domaine convexe fermé et borné. On peut chercher les points du domaine en lesquels G_1 est maximal en déterminant d'abord les coins des morceaux sur lesquels G_1 est affine. Les morceaux en question sont donnés par les systèmes d'inégalités

$$(1)\quad \begin{cases} p_1 \geq 0, p_2 \geq 0, p_1+p_2 \leq 1 \\ -2p_1+4 \leq 4p_1+2 \\ -2p_1+4 \leq 3p_1+p_2+2 \\ -2p_1+4 \leq -6p_1+2p_2+6 \end{cases}$$

morceau sur lequel $G_1(p_1,p_2) = -2p_1+4$;

$$(2)\quad \begin{cases} p_1 \geq 0, p_2 \geq 0, p_1+p_2 \leq 1 \\ 4p_1+2 \leq -2p_1+4 \\ 4p_1+2 \leq 3p_1+p_2+2 \\ 4p_1+2 \leq -6p_1+2p_2+6 \end{cases}$$

morceau sur lequel $G_1(p_1,p_2) = 4p_1+2$;

$$(3)\quad \begin{cases} p_1 \geq 0, p_2 \geq 0, p_1+p_2 \leq 1 \\ 3p_1+p_2+2 \leq -2p_1+4 \\ 3p_1+p_2+2 \leq 4p_1+2 \\ 3p_1+p_2+2 \leq -6p_1+2p_2+6 \end{cases}$$

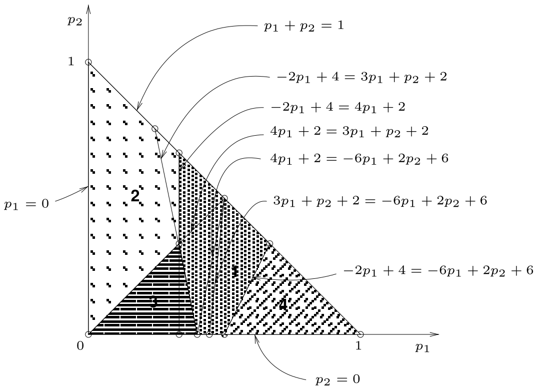
morceau sur lequel $G_1(p_1,p_2) = 3p_1+p_2+2$; enfin

$$(4)\quad \begin{cases} p_1 \geq 0, p_2 \geq 0, p_1+p_2 \leq 1 \\ -6p_1+2p_2+6 \leq -2p_1+4 \\ -6p_1+2p_2+6 \leq 4p_1+2 \\ -6p_1+2p_2+6 \leq -6p_1+2p_2+6 \end{cases}$$

morceau sur lequel $G_1(p_1,p_2) = -6p_1 + 2p_2 + 6$.

Un ou plusieurs des morceaux peut être vide. Les coins des morceaux font partie des points donnés par deux égalités parmis les inégalités ci-dessus. Par exemple les équations $p_1 = 0$ et $p_1 + p_2 = 1$ donnent le coin $(p_1,p_2) = (0,1)$; les équations $p_1 = 0$ et $4p_1+2 = -2p_1+4$ n'ont pas de solution ; les équations $4p_1+2 = -2p_1+4$ et $4p_1 + 2 = 3p_1 + p_2 + 2$ donnent le coin $(p_1,p_2) = (\frac{1}{3},\frac{1}{3})$.

Voici le dessin avec en hachuré les différents morceaux :



On trouve sur le dessin 8 coins. Il faut déterminer ces 8 coins, calculer la valeur de G_1 en ces coins et sélectionner les coins où G_1 est maximal. L'ensemble des points (p_1,p_2) où G_1 est maximal est l'enveloppe convexe des coins sélectionnés. Nous abandonnons la course presque à la ligne d'arrivée...

II.2.2. Exemple de calculs d'équilibres en stratégies mixtes

Devoir n° 1

Le but du devoir est d'expliciter tous les équilibres en stratégies mixtes (c'est à dire les équilibres de l'extension mixte) du jeu matriciel ci-dessous.

On utilisera le résultat suivant : Une fonction affine f sur un domaine convexe fermé borné (typiquement l'enveloppe convexe d'un ensemble fini de points de $\mathbb{R}^n$) atteint son maximum (resp. minimum) en un coin du domaine et l'ensemble des points où f est maximale (resp. minimale) est l'enveloppe convexe des coins où f est maximale (resp. minimale).

Des exemples détaillés de recherche de tels équilibres se trouvent dans les notes de cours ainsi que dans les solutions proposées de quelques exercices des feuilles de TD, cf `http://math.unice.fr/~dehon/Ens/L2thjeux/`

Si la résolution d'un système d'équations linéaires est nécessaire, le résultat non détaillé d'un calcul sur machine peut être utilisé, mais le système doit être correctement posé et l'intervention de la machine indiquée dans la rédaction.

Soit donc le jeu de matrice

$$\begin{pmatrix} 1 & -1 & 2 & 1 \\ 2 & 1 & -3 & 0 \\ 0 & \frac{1}{2} & -2 & \frac{1}{4} \end{pmatrix}$$

1. Montrer que la stratégie pure 3 du joueur 1 est dominée dans l'extension mixte du jeu. Qu'en déduit on sur les stratégies mixtes prudentes du joueur 1 ?

2. Trouver les stratégies mixtes prudentes du joueur 1 et du joueur 2. Quels sont les équilibres en stratégies mixtes du jeu ?

[Corrigé en diminuant autant que possible le nombre de stratégies pures pour simplifier la résolution.]

[Méthode algorithmique sans soucis du nombre de stratégies pures.]

D'autres exemples de résolution sur la page [Cours-TD Théorie des jeux en L2 MASS (2008-12)]

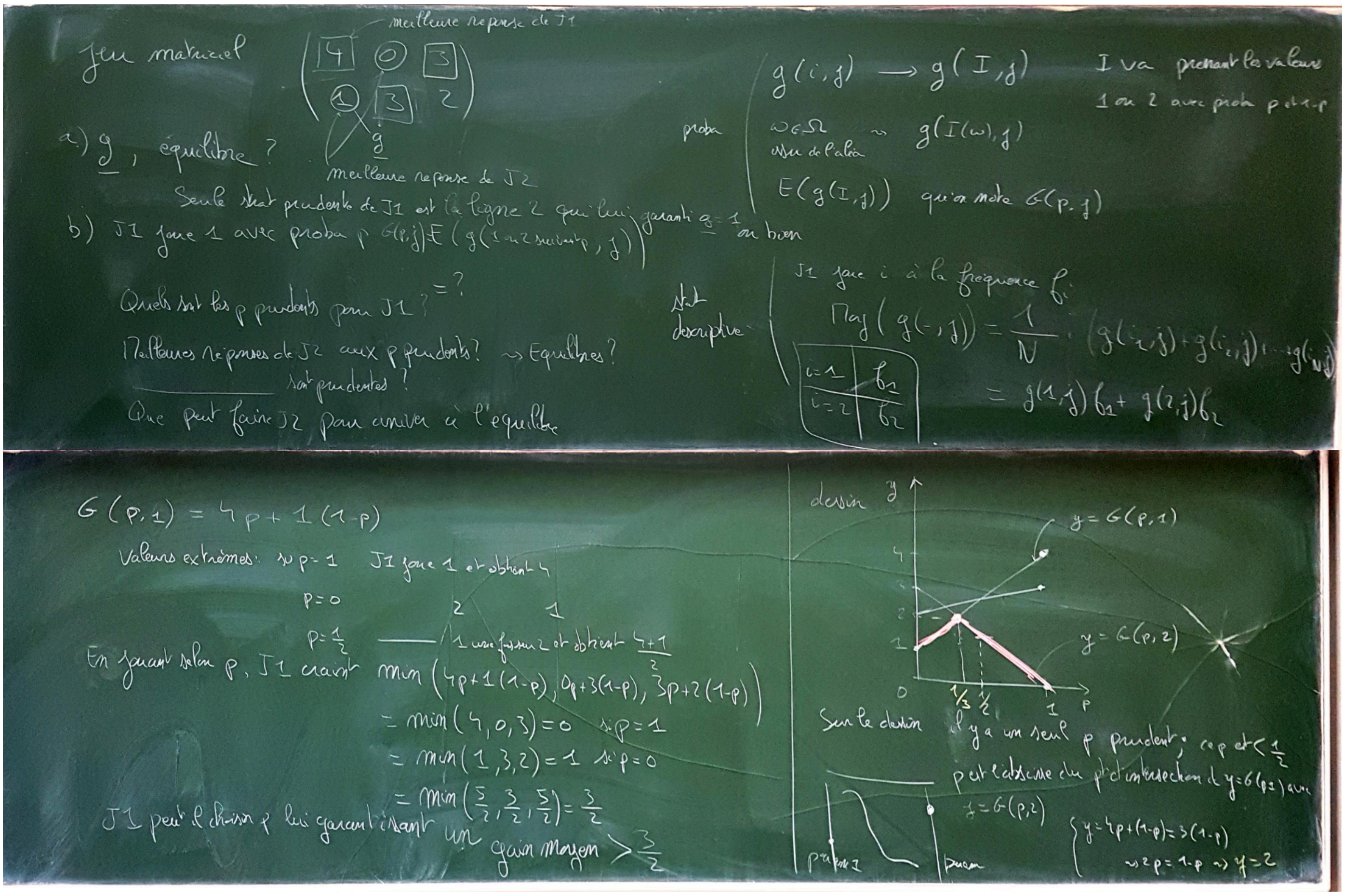
TD du 20 nov 24 : Stratégies mixtes pour un jeu matriciel à somme nulle

Ex. On considère le jeu de matrice de paiement
$\begin{pmatrix} 4 & 0 & 3 \\ 1 & 3 & 2 \end{pmatrix}$.

Implicitement le jeu est à deux joueurs à somme nulle. Le joueur 1 choisit une ligne : 1 ou 2 ; le joueur 2 choisit une colonne : 1 ou 2 ou 3 ; le joueur 1 obtient le gain indiqué par la matrice ; le joueur 2 obtient le gain opposé.

a. Que vaut $\underline{g}$, le gain garanti optimal du joueur 1 ?
Le jeu admet il un équilibre ?

b. Le joueur 1 choisit un nombre p entre 0 et 1 et joue aléatoirement sa stratégie 1 avec probabilité p, sa stratégie 2 avec probabilité $1-p$.
- Quelle garantie obtient J1 sur son espérance de gain (ou gain moyen), ou dit autrement que craint J1 s'il joue selon $p = \frac{1}{2}$?
- Quels sont les $p \in [0,1]$ prudents pour J1 ? Quel garantie a J1 sur son gain moyen lorsqu'il joue un p prudent ?
- Quelles sont les choix de colonnes meilleures réponses de J2 aux p prudents ? Sont ils prudents pour J2 ? Donnent ils un équilibre lorsque J1 joue selon p ?
- Montrer que J2 peut obtenir la garantie d'une perte moyenne au plus égale à 2 en jouant aléatoirement la colonne 1 avec probabilité q et la colonne 2 avec probabilité $(1-q)$ pour un q adéquat.
Pourquoi J2 ne jouera jamais la colonne 3 bien qu'elle ne soit pas dominée dans le jeu initial ?
- Montrer que si J2 joue selon un tel q et si J1 joue selon un p prudent alors ni J1 ni J2 ne peuvent obtenir un meilleur gain moyen.



$$\begin{pmatrix} 4 & 0 & 3 \\ 1 & 3 & 2 \end{pmatrix}$$

J1 joue aléatoirement selon $p = \frac{1}{3}$

Meilleure(s) réponse(s) de J2 : colonne 1 ou 2

$g(I, j)$ gain aléatoire

$$E(g(I,j)) = 4p + 1 - p = 3p + 1 \text{ si } j = 1 \quad (= 2 \text{ pour } p = 1/3)$$
$$= G(p,j) \qquad 3(1-p) \text{ si } j = 2$$
$$3p + 2(1-p) = p + 2 \text{ si } j = 3$$
$$2 + 1/3 > 2$$

On a vu sur le dessin que la colonne 3 n'est jamais une meilleure réponse

Seul 2 est prudent

$(p = \frac{1}{3}, j = 2)$ équilibre ?

Non

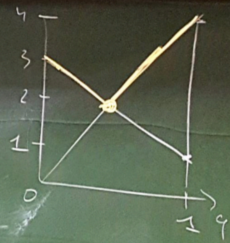
Pour que J1 ne puisse pas obtenir mieux que ce qui lui est garanti en jouant selon $p = \frac{1}{3}$ (donc qu'il ne regrette pas $p = \frac{1}{3}$), J2 doit jouer aléatoirement ses meilleures réponses à $p = \frac{1}{3}$ donc la colonne 1 avec proba q et la colonne 2 avec proba $1-q$

Peut-il choisir q de sorte à obtenir la garantie "perte au plus 2"

En jouant q J2 craint $\max\limits_{p \in [0,1]} \big(\underbrace{G(p,1)q + G(p,2)(1-q)}_{\text{fct polynomiale de degré 1 en } p}\big)$

$$= \max_{p = 0 \text{ ou } 1} \big(G(p,1)q + G(p,2)(1-q)\big)$$

$$\max\Big(\underbrace{1q + 3(1-q)}_{\text{J1 joue ligne 2}}, \underbrace{4q + 0(1-q)}_{\text{J1 joue ligne 1}}\Big)$$



Plutôt que ce dessin, on aurait pu chercher q tq J1 ne puisse obtenir mieux que 2 si J2 joue selon q

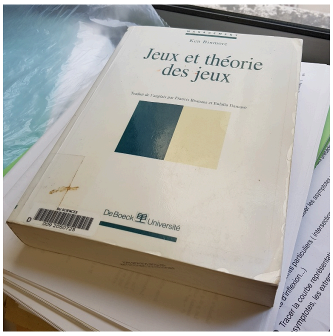
$$\left.\begin{array}{l} 4q \leq 2 \quad \rightsquigarrow q \leq \frac{1}{2} \\ \text{et } \underbrace{q + 3(1-q)}_{3-2q} \leq 2 \rightsquigarrow q \geq \frac{1}{2} \end{array}\right\} \rightsquigarrow q = \frac{1}{2}$$

$(p = \frac{1}{3}, q = \frac{1}{2})$ est un équilibre

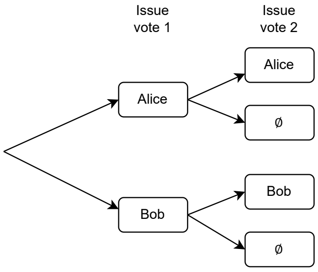
TD du 26 nov 24 : préférences et vote

Version du 26nov24 — F-X. Dehon

Cf [K. Binmore, Jeux et théorie des jeux, DeBoeck 1999 p5-6] (disponible à la BU).



Ex. Boris, Horace et Maurice envisagent d'accueillir dans leur club très restreint un quatrième membre. Initialement ils pensaient à Alice mais Maurice propose ensuite Bob. Ils décident alors de d'abord choisir (simultanément et sans vote nul) entre Alice et Bob avant de confirmer par un second vote l'accueil d'un nouveau membre.



Tous trois ont leurs préférences ; tous trois veulent une issue qui maximise leur préférence autant que possible :

Pour Boris : Alice $\succ \emptyset \succ$ Bob ($\emptyset$ désigne pas de nouveau membre)

Pour Horace : $\emptyset \succ$ Alice $\succ$ Bob

Pour Maurice : Bob $\succ$ Alice $\succ \emptyset$

Tout

a. On suppose que chacun vote lors des deux tours selon ses préférences. Quel sera l'issue des deux votes ?

L'un des membres regrette t-il son choix au vu des choix des autres membres ?

b. Quelle est la forme normale du jeu ? Quelle est sa taille (le nombre de triplets de stratégies) ?

Y a t-il des stratégies qui ne sont jamais des meilleures réponses pour Boris ou Horace ou Maurice ?

c. Le vote à chacun des tours selon les préférences est il une stratégie dominante pour Boris ? Pour Horace ? Pour Maurice ?

d. On considère le sous-jeu ou Alice est choisie lors du premier vote. Observer que le vote selon les préférences est une stratégie dominante de ce sous-jeu pour chacun des membres, en particulier il n'est pas regretté. Y a t-il d'autres équilibres du sous-jeu ?

Qu'en est il si Bob est choisi lors du premier vote ?

e. Déduire de (d) un équilibre du jeu. Y en a t-il d'autres ?

TD du 27 nov 24 : Mieux avec stratégies mixtes ?

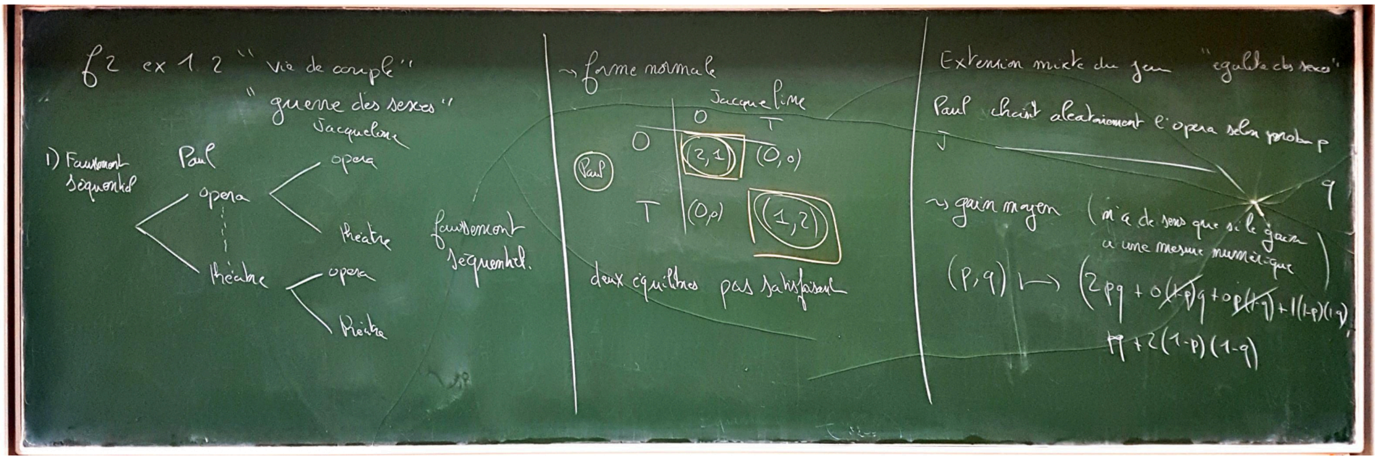
Nouvel équilibre dans l'extension mixte

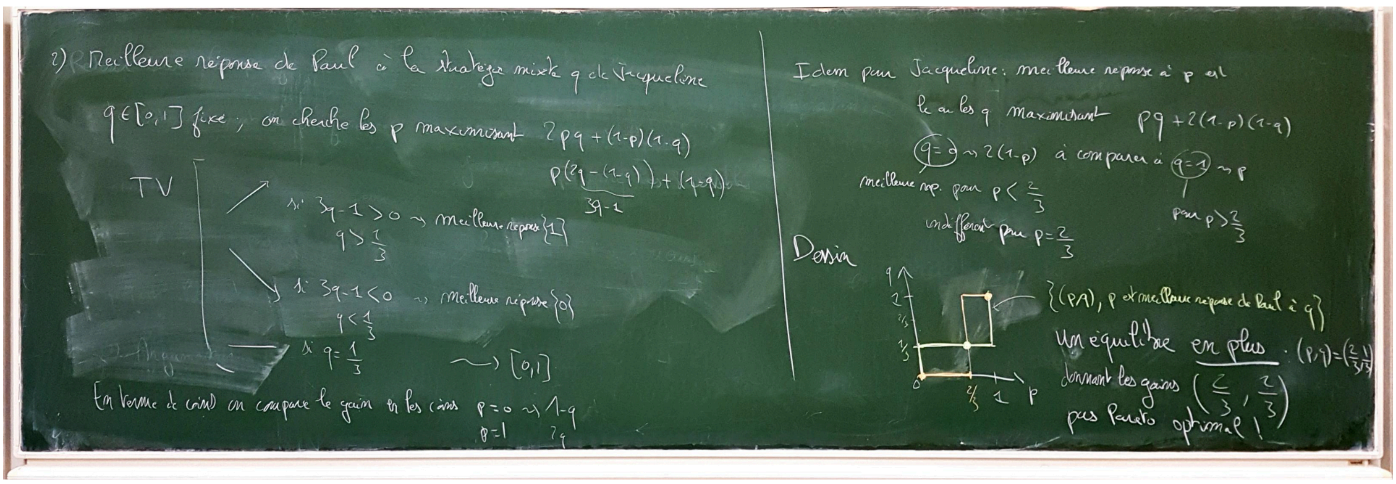
F2 ex.1.2 *Vie de couple* — **a.** Paul et Jacqueline vont chacun à l'un de leurs deux lieux habituels de distraction : l'opéra ou le théatre. Paul a une préférence pour l'opéra, Jacqueline pour le théatre. Paul, tout comme Jacqueline, note 0 sa satisfaction s'il ne se retrouve pas avec sa compagne, 1 s'il se retrouve avec sa compagne mais pas dans son lieu préféré, 2 s'il se retrouve avec sa compagne dans son lieu préféré.

Donnez la forme matricielle du jeu. Le jeu admet il un équilibre ?

b. Paul choisit de répartir sa fréquentation entre l'opéra et le théatre comme suit : il choisit une fois pour toute un nombre $p \in [0,1]$ puis décide de son lieu de sortie en tirant au hasard un nombre entre 0 et 1 (avec la touche ran# de sa vieille calculatrice par exemple). Si ce nombre est plus petit que p il ira à l'opéra ; sinon il ira au théatre. Jacqueline adopte la même procédure avec un nombre q ∈ [0, 1] choisi une fois pour toute par elle-même.

Quelles sont les satisfactions moyennes (après un grand nombre de semaines) de Paul et de Jacqueline en fonction de p et q ?
Quelle est la ou les meilleure(s) réponse(s) de Paul, en terme de choix de p, au choix par Jacqueline de q ? (i.e. q étant fixé, quels p donnent à Paul la meilleure satisfaction moyenne ?)
Quelle est la ou les meilleure(s) réponse(s) de Jacqueline au choix par Paul de p ?
Représentez sur un même dessin les ensembles $\{(p, \text{meilleure rép. à } p), p \in [0,1]\}$ et $\{(\text{meilleure rép. à } q, q), q \in [0,1]\}$. En déduire les équilibres du jeu.
Le ou les équilibres procurent ils à Paul et Jacqueline une satisfaction optimale ?

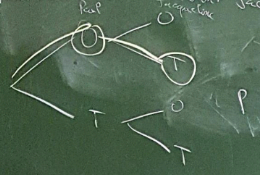




⤳ jeu collaboratif : Tous deux vont à O une fois sur deux

⤳ gains moyens $\left(\frac{3}{2}, \frac{3}{2}\right)$

2) Paul annonce son choix avant Jacqueline



P \ J	$(O \mapsto O, O \mapsto T)$	$(O \mapsto O, T \mapsto T)$	$(T \mapsto O, O \mapsto T)$	$(T \mapsto O, T \mapsto T)$
O	(2,1)	(2,1)	(0,0)	(0,0)
T	(0,0)	$\boxed{(1,2)}$	(0,0)	$\boxed{(1,2)}$

stratégie jusqu'au bout de

O est dominant mais pas strict^t dominant pour Paul, il y aura donc un équilibre en ligne O mais peut être aussi a priori en ligne T

Meilleures réponses de Jacqueline à O ⤳ équilibre

à T ⤳ regretté par Paul

D'autres équilibres en stratégie mixte ?

Ici choix optimal ne coïncide pas avec la notion d'équilibre

TD du 4 déc 24 : la nature s'en mèle - corr

Version du 11 déc. 24 — F-X. Dehon

D'après [In-Koo Cho and David M. Kreps, Signaling Games and Stable Equilibria, The Quarterly Journal of Economics, Vol. 102, No. 2 (1987)], exposé dans [Binmore Jeux et théorie des jeux §10.4,10.5].

Ex. Deux personnes sont en présence l'une de l'autre dans un bistrot : un client (J1) qui a le choix entre boire de la bière ou manger une quiche et un embêteur (J2) qui a le choix entre embêter le client ou passer son chemin.

Il y a deux profils pour le client : le costaud qui préfère la bière à la quiche et est indifférent à l'embêteur, et le mou qui à l'opposé préfère la quiche à la bière et craint l'embêteur.

On quantifie comme suit les préférences de J1 et J2 : J2 obtient 0 s'il passe son chemin, 1 s'il embête un client mou, -1 s'il embête un client costaud. J1 obtient $x \geq 0$ (x est un paramètre fixé) s'il consomme ce qu'il préfère, 0 sinon, auquel est retranché 1 s'il est mou et embêté, 0 dans tous les autres cas.

J1 connaît son profil mais J2 ne le connaît pas. J2 ne voit que ce que consomme J1, de sorte qu'il ne connaît pas précisément son gain lorsqu'il embête J1 ; le jeu à deux joueurs J1 et J2 est à information incomplète.

On rend le jeu à information complète en faisant intervenir un troisième joueur J0 qui choisit en amont du jeu le profil de J1 sans en tirer le moindre gain. J1 a connaissance du choix de J0 mais pas J2 ; J2 a connaissance du choix de J1. Le jeu devient à information complète (tous les joueurs connaissent la forme normale du jeu) mais sous sa forme séquentiel le jeu n'est pas à information parfaite : J2 a une information partielle sur l'état du jeu au moment de faire son choix.

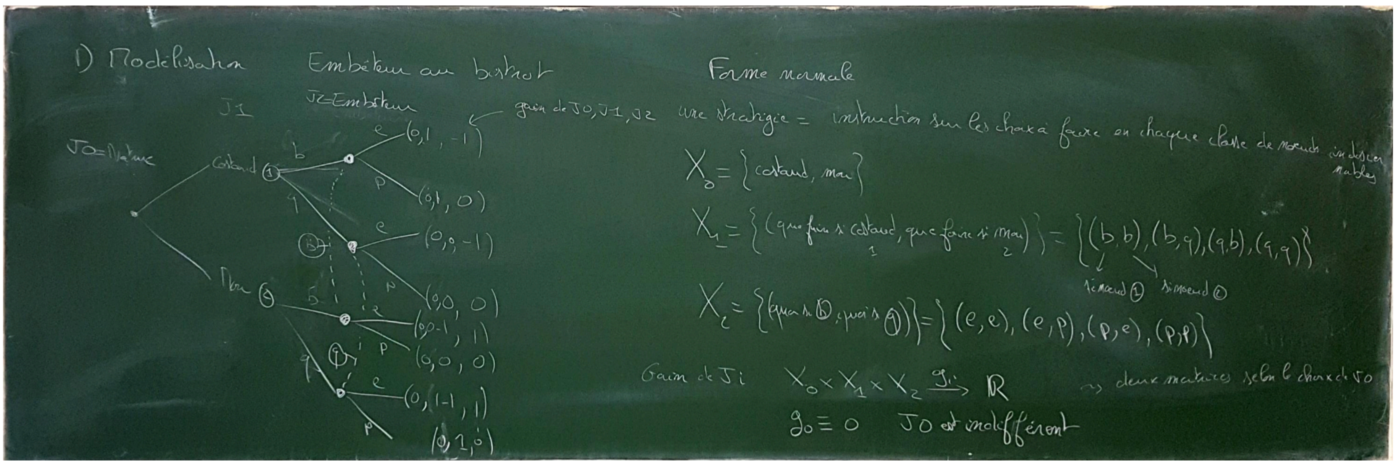
Analyse informelle *: Le costaud est indifférent au choix de J2 donc il ne joue pas (s'il agit rationnellement) ; il consomme la bière quoi qu'il arrive. Si le mou préfère la quiche quand bien même il serait embêté (i.e. sa relation de préférence est quiche sans embêtement ≻ quiche avec embêtement ≻ bière sans embêtement ≻ bière avec embêtement), il ne joue pas non plus : il consomme la quiche et alors le produit consommé vaut révélation à J2 du profil de J1. Sous l'hypothèse que J1 joue rationnellement (optimise son gain) J2 embête ou pas J1 selon le produit consommé par J1.*

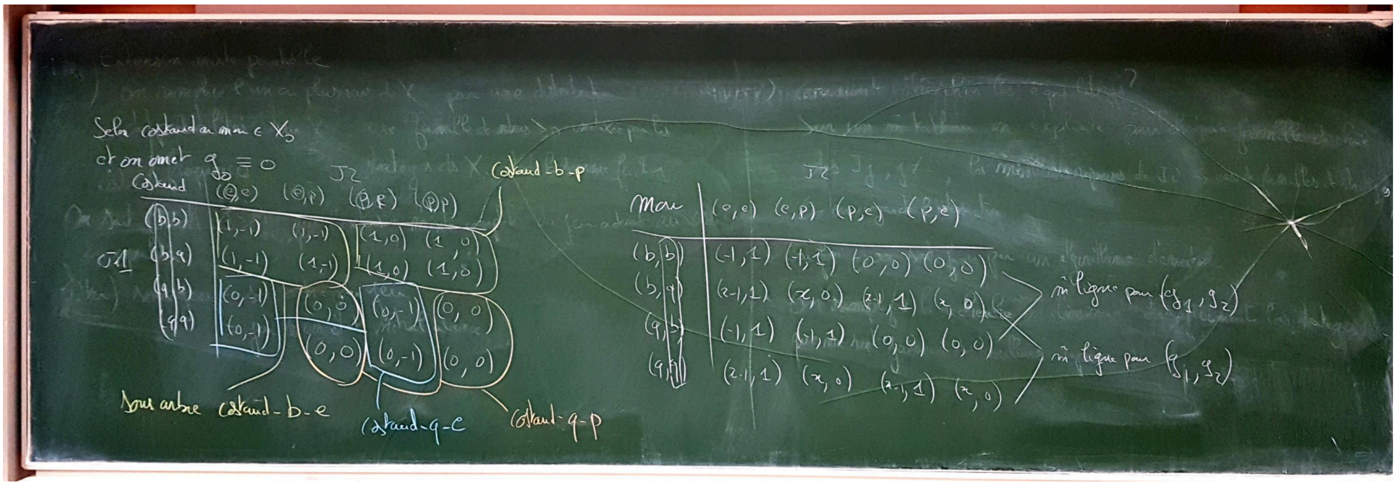
Supposons maintenant que le mou accorde plus d'importance à ne pas être embêté qu'à ce qu'il consomme ; il est tentant pour lui de se faire passer pour costaud en consommant de la bière. Mais J2 qui réfléchit pour deux ne prendra plus la consommation de bière comme signe irréfutable du profil de J1. Le jeu commence.

a. Expliciter la forme extensive (l'arbre de décision) et la forme normale du jeu à deux joueurs.

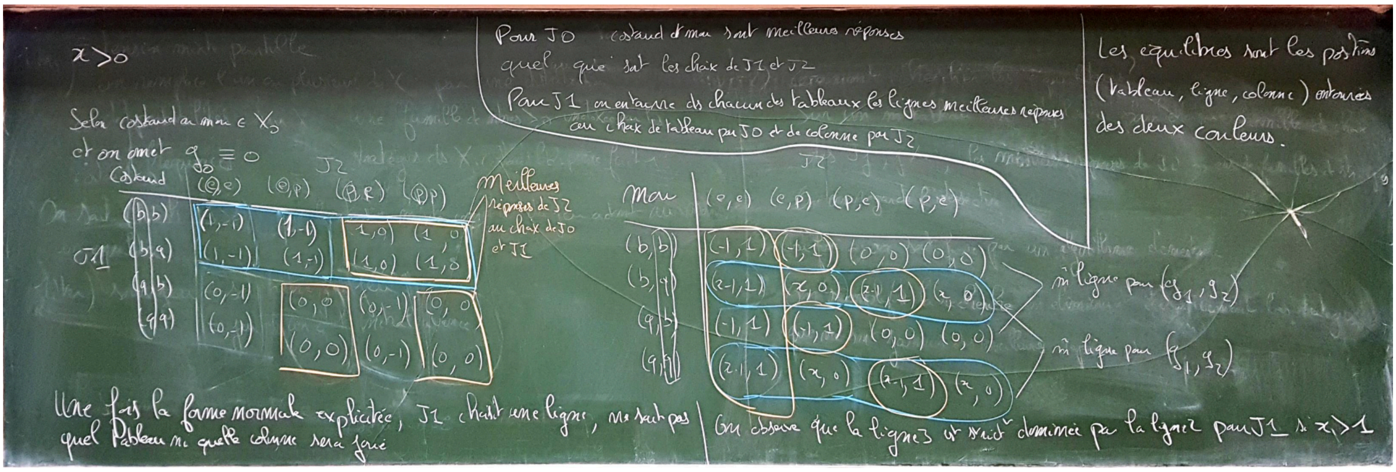
b. Identifier les équilibres des sous jeux consistant en les deux choix possibles de J0, c'est à dire du jeu conditionné à J1 est costaud d'une part, conditionné à J1 est mou d'autre part. Y a t-il vraiment jeu ?

c. Quels sont les équilibres du jeu entier selon le paramètre x ?
Y a t-il des stratégies pures ou mixtes garantissant l'équilibre à J1 et J2 quel que soit le choix de J0 ?





Légende : J0 choisit le tableau, J1 la ligne, J2 la colonne.



Précision : les lignes (b,q) et (q,q) sont des meilleures réponses de J1 au tableau "mou" (choix de J0) et à la colonne (p,e) (choixi de J2) seulement si $x \geq 1$, auquel cas le choix (b,q) pour J1 et (p,e) pour J2 est un équilibre quelque soit le choix de J0, comme annoncé dans l'analyse informelle plus haut.

On suppose maintenant qu'il y a une proportion p de profil "costaud" parmi les joueurs J1 possibles et on suppose $0 < x < 1$.

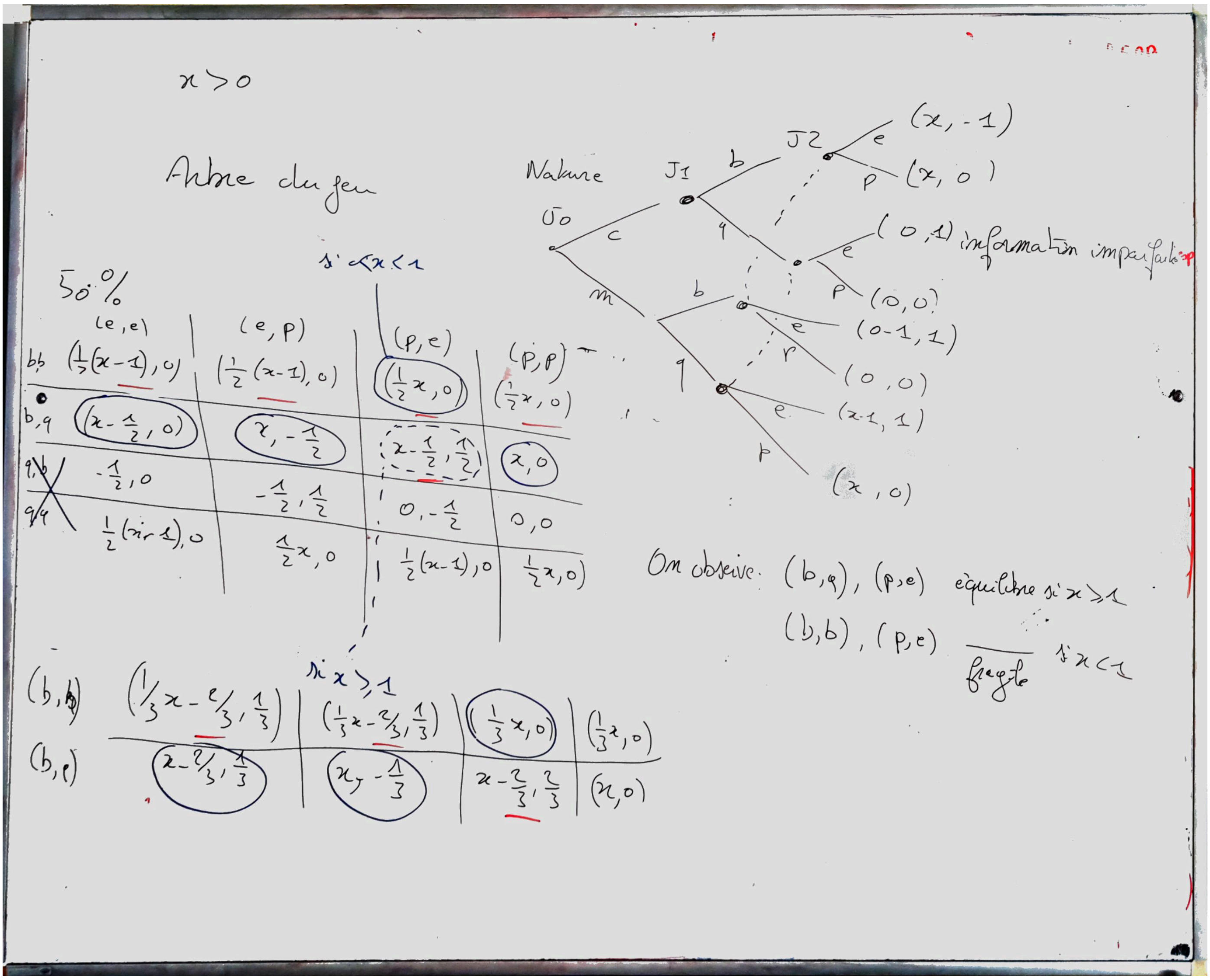
d. Voici le tableau des gains moyen de J1 et J2 pour $p = \frac{1}{2}$. Y a t-il un ou plusieurs équilibres ?

$P(\text{Costaud}) = \frac{1}{2}$	(e,e)	(e,p)	(p,e)	(p,p)
(b,b)	$(\frac{1}{2}x - \frac{1}{2}, 0)$	$(\frac{1}{2}x - \frac{1}{2}, 0)$	$(\frac{1}{2}x, 0)$	$(\frac{1}{2}x, 0)$
(b,q)	$(x - \frac{1}{2}, 0)$	$(x, -\frac{1}{2})$	$(x - \frac{1}{2}, \frac{1}{2})$	$(x, 0)$
(q,b)	$(-\frac{1}{2}, 0)$	$(-\frac{1}{2}, \frac{1}{2})$	$(0, -\frac{1}{2})$	$(0, 0)$
(q,q)	$(\frac{1}{2}x - \frac{1}{2}, 0)$	$(\frac{1}{2}x, 0)$	$(\frac{1}{2}x - \frac{1}{2}, 0)$	$(\frac{1}{2}x, 0)$

Calcul avec Sagemath de la matrice des gains moyens de J1 et J2 selon la stratégie mixte $(p, (1-p))$ de J0 :

e. Calculer le tableau des gains moyens pour $p = \frac{1}{3}$.
Quel sous-jeu obtient on lorsqu'on élimine successivement les stratégies de J1 et J2 qui ne sont jamais des meilleures réponses ?

$P(\text{Costaud}) = \frac{1}{3}$	(e,e)	(e,p)	(p,e)	(p,p)
(b,b)	$(\frac{1}{3}x - \frac{2}{3}, \frac{1}{3})$	$(\frac{1}{3}x - \frac{2}{3}, \frac{1}{3})$	$(\frac{1}{3}x, 0)$	$(\frac{1}{3}x, 0)$
(b,q)	$(x - \frac{2}{3}, \frac{1}{3})$	$(x, -\frac{1}{3})$	$(x - \frac{2}{3}, \frac{2}{3})$	$(x, 0)$
(q,b)	$(-\frac{2}{3}, \frac{1}{3})$	$(-\frac{2}{3}, \frac{2}{3})$	$(0, -\frac{1}{3})$	$(0, 0)$
(q,q)	$(\frac{2}{3}x - \frac{2}{3}, \frac{1}{3})$	$(\frac{2}{3}x, 0)$	$(\frac{2}{3}x - \frac{2}{3}, \frac{1}{3})$	$(\frac{2}{3}x, 0)$



e. $p = \frac{1}{3}$. Calculer les équilibres de l'extension mixte pour J1 et J2 de ce sous-jeu.

Pourquoi à l'équilibre J1 continue de consommer de la quiche lorsqu'il est mou (deux tiers des profils de J1) alors qu'il est sûr d'obtenir le gain minimal $x - 1$ lorsqu'il fait ce choix ?
Pourquoi en comparaison lorsque le profil mou est moins fréquent, de fréquence $\frac{1}{2}$, J1 évite totalement de consommer de la quiche ?

Rq. Les stratégies qui ne sont jamais des meilleures réponses ne peuvent donner des équilibres en stratégies pures. Sont elles strictement dominées dans l'extension mixte du jeu ?

P(costaud)=1/3. Deux clients forment le profil mou, fréquentent le bar avec la même fréquence, ont la prescription de jouer (b,q) suivant telle proba à l'équilibre. L'un des deux a t-il intérêt à ne pas respecter la prescription ? Que devient l'équilibre ?

TD du 4 déc 24 : Déguisement - corr

Version du 13 déc. 24 — F-X. Dehon

D'après [In-Koo Cho and David M. Kreps, Signaling Games and Stable Equilibria, The Quarterly Journal of Economics, Vol. 102, No. 2 (1987)], exposé dans [Binmore Jeux et théorie des jeux §10.4,10.5].

Ex. Deux personnes sont en présence l'une de l'autre dans un bistrot : un client (J1) qui a le choix entre boire de la bière ou manger une quiche et un embêteur (J2) qui a le choix entre embêter le client ou passer son chemin.

Il y a deux profils pour le client : le costaud qui préfère la bière à la quiche et est indifférent à l'embêteur, et le mou qui à l'opposé préfère la quiche à la bière et craint l'embêteur.

On quantifie comme suit les préférences de J1 et J2 : J2 obtient 0 s'il passe son chemin, 1 s'il embête un client mou, -1 s'il embête un client costaud. J1 obtient $x \geq 0$ (x est un paramètre fixé) s'il consomme ce qu'il préfère, 0 sinon, auquel est retranché 1 s'il est mou et embêté, 0 dans tous les autres cas.

J1 connaît son profil mais J2 ne le connaît pas. J2 ne voit que ce que consomme J1, de sorte qu'il ne connaît pas précisément son gain lorsqu'il embête J1 ; le jeu à deux joueurs J1 et J2 est à information incomplète.

On rend le jeu à information complète en faisant intervenir un troisième joueur J0 qui choisit en amont du jeu le profil de J1 sans en tirer le moindre gain. J1 a connaissance du choix de J0 mais pas J2 ; J2 a connaissance du choix de J1. Le jeu devient à information complète (tous les joueurs connaissent la forme normale du jeu) mais sous sa forme séquentiel le jeu n'est pas à information parfaite : J2 a une information partielle sur l'état du jeu au moment de faire son choix.

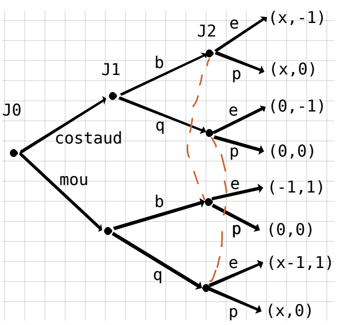
***Analyse informelle** : Le costaud est indifférent au choix de J2 donc il ne joue pas (s'il agit rationnellement) ; il consomme la bière quoi qu'il arrive. Si le mou préfère la quiche quand bien même il serait embêté (i.e. sa relation de préférence est quiche sans embêtement ≻ quiche avec embêtement ≻ bière sans embêtement ≻ bière avec embêtement), il ne joue pas non plus : il consomme la quiche et alors le produit consommé vaut révélation à J2 du profil de J1. Sous l'hypothèse que J1 joue rationnellement (optimise son gain) J2 embête ou pas J1 selon le produit consommé par J1.*

Supposons maintenant que le mou accorde plus d'importance à ne pas être embêté qu'à ce qu'il consomme ; il est tentant pour lui de se faire passer pour costaud en consommant de la bière. Mais J2 qui réfléchit pour deux ne prendra plus la consommation de bière comme signe irréfutable du profil de J1. Le jeu commence.

a. Expliciter la forme extensive (l'arbre de décision) et la forme normale du jeu à deux joueurs.

b. Identifier les équilibres des sous jeux consistant en les deux choix possibles de J0, c'est à dire du jeu conditionné à J1 est costaud d'une part, conditionné à J1 est mou d'autre part. Y a t-il vraiment jeu ?

c. Quels sont les équilibres du jeu entier selon le paramètre x ?
Y a t-il des stratégies pures ou mixtes garantissant l'équilibre à J1 et J2 quel que soit le choix de J0 ?



Forme normale : tableau tridimensionnel ⟷ famille indexée par les stratégies de J0 de tableau bi-dimensionnel. J0 choisit le tableau (costaud ou mou), J1 choisit la ligne, J2 choisit la colonne. On n'indique ci-dessous que les gains de J1 et J2, celui de J0 étant constant égal à 0.

$costaud$	(e,e)	(e,p)	(p,e)	(p,p)
(b,b)	$(x,-1)$	$(x,-1)$	$(x,0)$	$(x,0)$
(b,q)	$(x,-1)$	$(x,-1)$	$(x,0)$	$(x,0)$
(q,b)	$(0,-1)$	$(0,0)$	$(0,-1)$	$(0,0)$
(q,q)	$(0,-1)$	$(0,0)$	$(0,-1)$	$(0,0)$

mou	(e,e)	(e,p)	(p,e)	(p,p)
(b,b)	$(-1,1)$	$(-1,1)$	$(0,0)$	$(0,0)$
(b,q)	$(x-1,1)$	$(x,0)$	$(x-1,1)$	$(x,0)$
(q,b)	$(-1,1)$	$(-1,1)$	$(0,0)$	$(0,0)$
(q,q)	$(x-1,1)$	$(x,0)$	$(x-1,1)$	$(x,0)$

On suppose maintenant que J0 joue la stratégie mixte p (autrement dit on considère le jeu à deux joueurs J1,J2 avec une probabilité p que J1 soit costaud) et on s'intéresse au gain moyen de J1 et J2. On suppose $0 < x < 1$.

d. Voici le tableau des gains moyen de J1 et J2 pour $p=\frac{1}{2}$. Y a t-il un ou plusieurs équilibres ?

$P(\text{Costaud})=\frac{1}{2}$	(e,e)	(e,p)	(p,e)	(p,p)
(b,b)	$\left(\frac{1}{2}x-\frac{1}{2},0\right)$	$\left(\frac{1}{2}x-\frac{1}{2},0\right)$	$\left(\frac{1}{2}x,0\right)$	$\left(\frac{1}{2}x,0\right)$
(b,q)	$\left(x-\frac{1}{2},0\right)$	$\left(x,-\frac{1}{2}\right)$	$\left(x-\frac{1}{2},\frac{1}{2}\right)$	$(x,0)$
(q,b)	$\left(-\frac{1}{2},0\right)$	$\left(-\frac{1}{2},\frac{1}{2}\right)$	$\left(0,-\frac{1}{2}\right)$	$(0,0)$
(q,q)	$\left(\frac{1}{2}x-\frac{1}{2},0\right)$	$\left(\frac{1}{2}x,0\right)$	$\left(\frac{1}{2}x-\frac{1}{2},0\right)$	$\left(\frac{1}{2}x,0\right)$

e. Calculer le tableau des gains moyens pour $p=\frac{1}{3}$.
Quel [sous-] jeu obtient on lorsqu'on élimine successivement les stratégies strictement dominées ?

Calcul avec Sagemath de la matrice des gains moyens de J1 et J2 selon la stratégie mixte $(p,(1-p))$ de J0 :

$P(\text{Costaud})=\frac{1}{3}$	(e,e)	(e,p)	(p,e)	(p,p)
(b,b)	$\left(\frac{1}{3}x-\frac{2}{3},\frac{1}{3}\right)$	$\left(\frac{1}{3}x-\frac{2}{3},\frac{1}{3}\right)$	$\left(\frac{1}{3}x,0\right)$	$\left(\frac{1}{3}x,0\right)$
(b,q)	$\left(x-\frac{2}{3},\frac{1}{3}\right)$	$\left(x,-\frac{1}{3}\right)$	$\left(x-\frac{2}{3},\frac{2}{3}\right)$	$(x,0)$
(q,b)	$\left(-\frac{2}{3},\frac{1}{3}\right)$	$\left(-\frac{2}{3},\frac{2}{3}\right)$	$\left(0,-\frac{1}{3}\right)$	$(0,0)$
(q,q)	$\left(\frac{2}{3}x-\frac{2}{3},\frac{1}{3}\right)$	$\left(\frac{2}{3}x,0\right)$	$\left(\frac{2}{3}x-\frac{2}{3},\frac{1}{3}\right)$	$\left(\frac{2}{3}x,0\right)$

$P(costaud)=1/3$	(e,e)	(e,p)	(p,e)
(b,b)	$\left(\frac{1}{3}x-\frac{2}{3},\frac{1}{3}\right)$	$\left(\frac{1}{3}x-\frac{2}{3},\frac{1}{3}\right)$	$\left(\frac{1}{3}x,0\right)$
(b,q)	$\left(x-\frac{2}{3},\frac{1}{3}\right)$	$\left(x,-\frac{1}{3}\right)$	$\left(x-\frac{2}{3},\frac{2}{3}\right)$

Observer que le jeu n'admet pas d'équilibre sans stratégie mixte.
Observer que J1 ne peut pas jouer pas la ligne 1 avec proba 1 à l'équilibre de l'extension mixte.
Observer que la colonne 2 est strictement dominée pour J2 lorsqu'on exclut $(1,0,0,0)$ des stratégies mixtes de J1.

f. Déterminer alors les équilibres en stratégies mixtes.

Réponse numérique (en spécifiant une valeur pour x) : cf calcul matrices de J1 et J2 avec SageMathCell
et https://cgi.csc.liv.ac.uk/~rahul/bimatrix_solver/

- p=1/3, x=1/4 ⇝ 1/2 1/2 0 0 pour J1, 3/4 0 1/4 0 pour J2, gain (-5/12,1/3)

$P(costaud)=1/3$	(e,e)	(e,p)	(p,e)	(p,p)
(b,b)	$\left(-\frac{7}{12},\frac{1}{3}\right)$	$\left(-\frac{7}{12},\frac{1}{3}\right)$	$\left(\frac{1}{12},0\right)$	$\left(\frac{1}{12},0\right)$
(b,q)	$\left(-\frac{5}{12},\frac{1}{3}\right)$	$\left(\frac{1}{4},-\frac{1}{3}\right)$	$\left(-\frac{5}{12},\frac{2}{3}\right)$	$\left(\frac{1}{4},0\right)$
(q,b)	$\left(-\frac{2}{3},\frac{1}{3}\right)$	$\left(-\frac{2}{3},\frac{2}{3}\right)$	$\left(0,-\frac{1}{3}\right)$	$(0,0)$
(q,q)	$\left(-\frac{1}{2},\frac{1}{3}\right)$	$\left(\frac{1}{6},0\right)$	$\left(-\frac{1}{2},\frac{1}{3}\right)$	$\left(\frac{1}{6},0\right)$

  Avec quelle probabilité J1 choisit il bière sachant qu'il est costaud ? Et sachant qu'il est mou ?
  Quelle est la probabilité que J2 embète un client (J1) mou quand il embète un client buvant de la bière ?
- p=1/3, x=3/4 ⇝ 1/2 1/2 0 0 pour J1, 1/4 0 3/4 0 pour J2, gain (1/12,1/3)
  Avec quelle probabilité J1 choisit il bière sachant qu'il est mou ?
- p=1/4, x=1/4 l1,l2, c1,c3 ⇝ EE 1 P1: (1) 1/3 2/3 EP= -1/2 P2: (1) 3/4 1/4 EP= 1/2

g. Pourquoi à l'équilibre J1 continue de consommer de la quiche lorsqu'il est mou (deux tiers des profils de J1) alors qu'il est sûr d'obtenir le gain minimal $x-1$ lorsqu'il fait ce choix ?
Pourquoi en comparaison lorsque le profil mou est moins fréquent, de fréquence $\frac{1}{2}$, J1 évite totalement de consommer de la quiche ?

Rq. Les stratégies qui ne sont jamais des meilleures réponses ne peuvent donner des équilibres en stratégies pures. Sont elles strictement dominées dans l'extension mixte du jeu ?

---

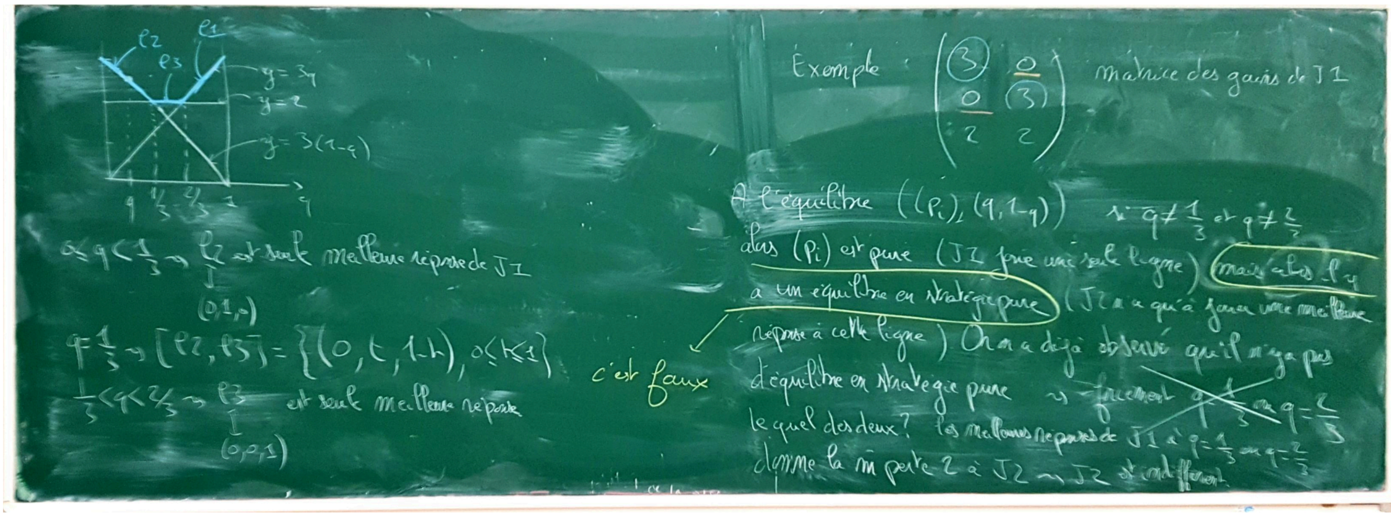
h. P(costaud)=1/3. Deux clients forment le profil mou, fréquentent le bar avec la même fréquence, ont la prescription de jouer (b,q) suivant telle proba à l'équilibre. L'un des deux a t-il intérêt à ne pas respecter la prescription ? Que devient l'équilibre ?

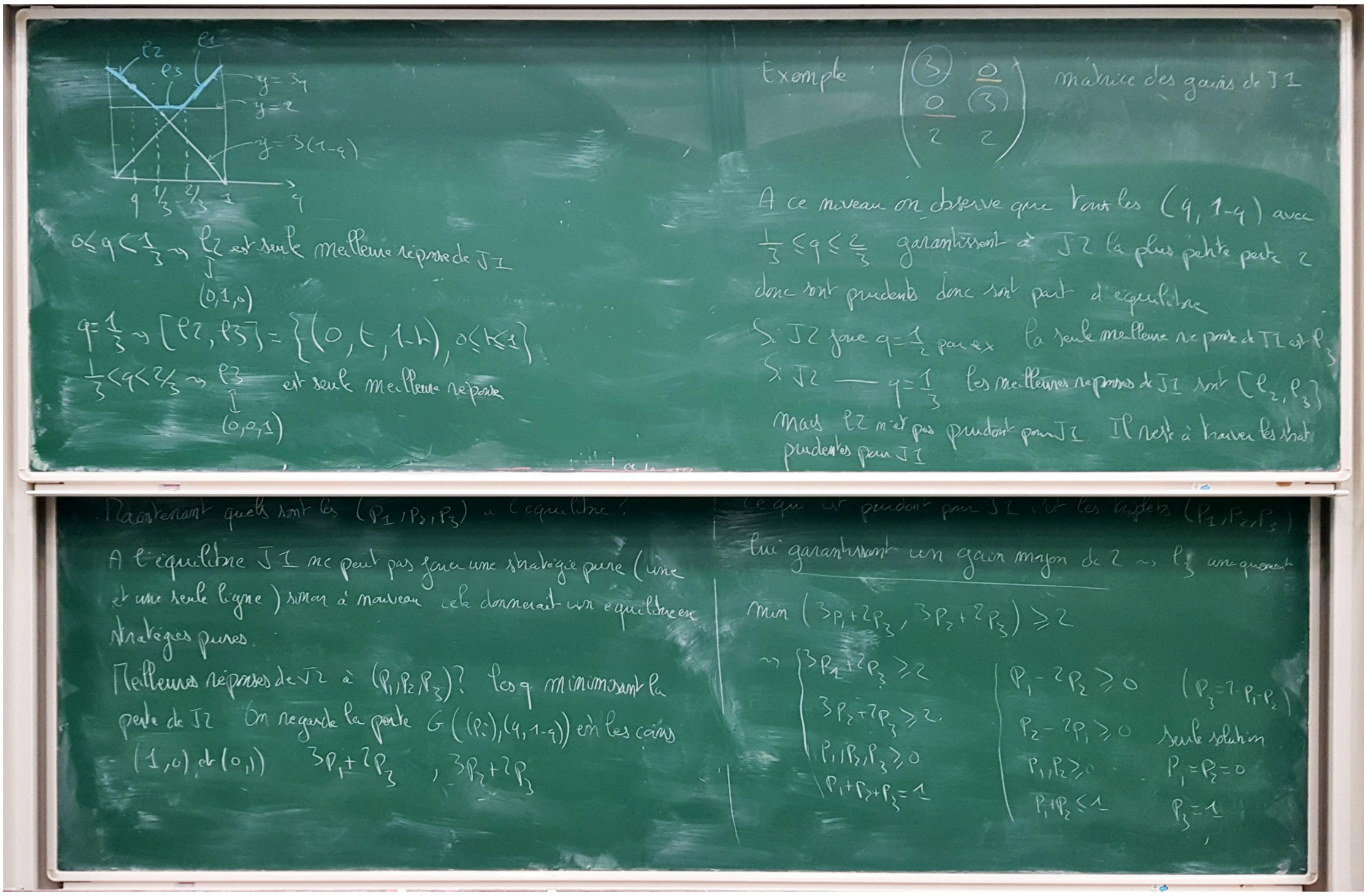
Cours et TD du 11 déc. Calcul des stratégies mixtes

11 dec. 24

Exemple avec le jeu à deux joueurs à somme nulle de matrice
$\begin{pmatrix} 3 & 0 \\ 0 & 3 \\ 2 & 2 \end{pmatrix}$.

- Via stratégies mixtes prudentes





Suite en TD

Calculs fastidieux versus raisonnement

règle — règles ?

$$\begin{pmatrix} \underline{3} & \underline{0} \\ \underline{0} & \underline{3} \\ \underline{2} & \underline{2} \end{pmatrix}$$

jeu matriciel (jeu fini à 2 joueurs à somme nulle)

Equilibres en stratégies pures via meilleures réponses

Meilleures réponses de J1 (certaines lignes) aux colonnes jouées par J2

Meilleures réponses de J2 (certaines colonnes) aux lignes jouées

Constat : pas d'équilibre en stratégies pures

$\rightsquigarrow$ on regarde les strat mixtes (p_1, p_2, p_3) pour J1

(q_1, q_2) pour J2

Slogan Les stratégies qui ne sont jamais des meilleures réponses peuvent être oubliées dans la recherche des équilibres de l'extension mixte

critique : preuve ou contre exemple ou reste à l'état de conjecture

Ici ℓ_3 n'est jamais une meilleure réponse pour J1

Mais $((0, 0, 1), (\frac{1}{2}, \frac{1}{2}))$ est un équilibre de l'extension mixte (i.e. pour le gain moyen)

ℓ_3

Tester si tel couple de stratégies mixtes est un équilibre est relativement facile : J1 regrette ? J2 regrette ?

Si J1 joue $\ell 3$, J2 n'a rien à regretter

Si J2 joue $(\frac{1}{2}, \frac{1}{2})$ J1 obtient $\frac{3+0}{2}$ en jouant $\ell 1$

$\frac{0+3}{2}$ en jouant $\ell 2$

2 —— $\ell 3$

$p2 + (1-p)\frac{3}{2}$ en jouant $\ell 3$ avec fréquence p

< 2 si $p < 1$

$\ell 3$ est la seule meilleure réponse de J1 à $(\frac{1}{2}, \frac{1}{2})$

Calcul des équilibres de l'extension mixte

1ère voie spécifique aux jeux à 2 joueurs à somme nulle : déterminer les stratégies mixtes prudentes

2ème voie calcul des meilleures réponses

3ème voie limiter le champ des possibles par le raisonnement

$\hookrightarrow$ Un couple de stratégies pures n'est pas (ici) un équilibre donc J1 ou J2 joue une stratégie mixte

Si ~~un ens~~ de lignes jouées à une certaine freq > 0 est une meilleure réponse à la stratégie à l'équilibre $(q, 1-q)$ de J2 alors chaque ligne de cette ens est une meilleure réponse.

A l'équilibre

Soit il y a un équilibre avec C1, ou avec C2

Soit J2 <u>doit</u> jouer C1 et C2 avec des freq > 0

$$\begin{pmatrix} \underline{3} & \underline{0} \\ \underline{0} & \underline{3} \\ \underline{2} & \underline{2} \end{pmatrix}$$

Equilibre avec C1 ? J1 obtient 3 en jouant $\ell 1$ avec freq 1

< 3 en $\ell 1$ avec freq < 1

donc J1 joue $\ell 1$ Mais alors J2 regrette C2

Idem avec C2

Conclusion : à l'équilibre J2 joue à la fois C1 et C2 et obtient le même gain avec C1 qu'avec C2

J1 joue (p_1, p_2, p_3) à l'équilibre On a forcément $\underbrace{3p_1 + 2p_3}_{\text{perte moyenne de J2 en jouant C1}} = 3p_2 + 2p_3 \rightsquigarrow p_1 = p_2$

Le gain moyen de J1 devient

$2p_3 + \frac{(1-p_3)}{2}0 + \frac{(1-p_3)}{2}3$

$= 2p_3 + \frac{3}{2}(1-p_3)$

Seule meilleure réponse de J1 $p_3 = 1$

Quels sont les $q \in [0,1]$ tq la meilleure réponse de J1 soit ℓ_3 ?

q tq $\max(3q, 3(1-q), 2) = 2$

$\Leftrightarrow \begin{cases} 3q \leq 2 \\ 3(1-q) \leq 2 \end{cases} \Leftrightarrow q \in [\frac{1}{3}, \frac{2}{3}]$

R_q On reprend le raisonnement depuis le début cette fois par les stratégies pures jouées par J1 à l'équilibre

$\ell 1$ $\boxed{\text{avec freq } 1}$ est possible ? non car alors J2 jouerait C2 et alors J1 regrette $\ell 2$

$\ell 2$ pas possible

$\ell 3$ on n'a pas cette conclusion. Il faut J2 joue de telle façon que J1 ne regrette pas. donc J2 joue $(q, 1-q)$ de sorte que $3q \leq 2$ et $3(1-q) \leq 2$

Plus général^t si J1 peut jouer (p_1, p_2, p_3) à l'équilibre alors il obtient le même gain pour chaque ligne i tq $p_i > 0$

Par ex si $p_1, p_2, p_3 > 0$ alors pour le q joué par J2 on a $3q = 3(1-q) = 2$ pas possible

Si seul^t $p_1, p_2 > 0$, $p_3 = 0$ il faudrait $3q = 3(1-q) \rightsquigarrow q = \frac{1}{2}$ mais alors J1 obtient $3/2$ et regrette $\ell 3$

...

L2jeux - int1r - 18 dec 24

Q0. Donner un résultat ou un exemple du cours (pas trop long !) qui illustre bien ce dont parle le cours.

Q1. On considère un jeu simultané à deux joueurs J1,J2 avec des ensembles de stratégies X, Y et des fonctions de gain de chaque joueur $g_i : X \times Y \to \mathbb{R}, i = 1, 2.$
Qu'est-ce qu'une meilleure réponse de J1 à une stratégie $y \in Y$ de J2 ?
J1 connait il d'avance la stratégie jouée par J2 ? Dans quelle(s) situation(s) J1 peut s'assurer de jouer une meilleure réponse, sous l'hypothèse bien sûr que chaque joueur joue rationnellement ?

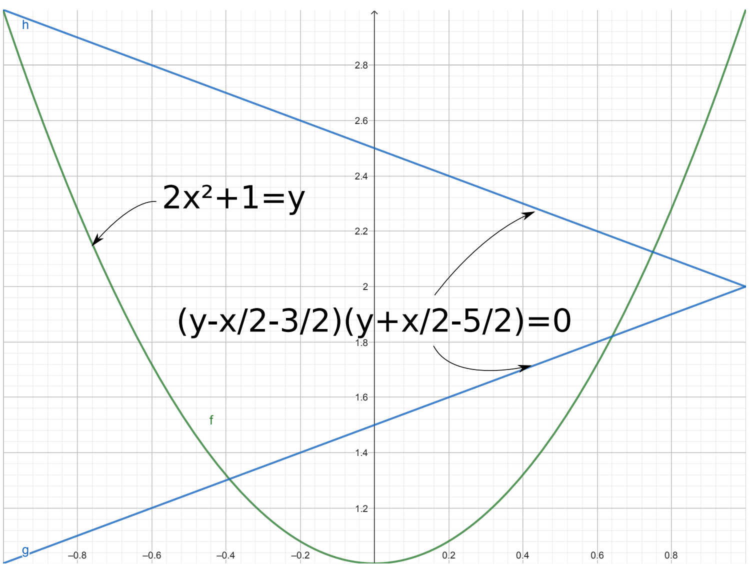
Ex.1. Donner un exemple de jeu matriciel (deux joueurs) sans équilibre.

Ex.2. On considère le jeu à deux joueurs de matrice de paiement suivante, où J1 choisit la ligne et J2 la colonne et où x est un paramètre fixé dans $\mathbb{R}$:

	$c1$	$c2$	$c3$	$c4$
$l1$	$(\frac{1}{3}x - \frac{2}{3}, \frac{1}{3})$	$(\frac{1}{3}x - \frac{2}{3}, \frac{1}{3})$	$(\frac{1}{3}x, 0)$	$(\frac{1}{3}x, 0)$
$l2$	$(x - \frac{2}{3}, \frac{1}{3})$	$(x, -\frac{1}{3})$	$(x - \frac{2}{3}, \frac{2}{3})$	$(x, 0)$
$l3$	$(-\frac{2}{3}, \frac{1}{3})$	$(-\frac{2}{3}, \frac{2}{3})$	$(0, -\frac{1}{3})$	$(0, 0)$
$l4$	$(\frac{2}{3}x - \frac{2}{3}, \frac{1}{3})$	$(\frac{2}{3}x, 0)$	$(\frac{2}{3}x - \frac{2}{3}, \frac{1}{3})$	$(\frac{2}{3}x, 0)$

a. Quel jeu obtient on en éliminant successivement les stratégies strictement dominées, selon la valeur du paramètre x ?
b. Pour $x = \frac{1}{3}$ puis pour $x = \frac{4}{3}$ indiquer sur la matrice du jeu obtenu les meilleures réponses de J1 aux choix de J2 et les meilleures réponses de J2 au choix de J1, selon la valeur de x.
Que se passe t-il pour $x = 1$?
Y a t-il un (ou des) équilibre(s), selon la valeur du paramètre x ?
c. On fixe $x=\frac{1}{3} J1 peut il joueur de façon prévisible par J2 sans nuire à son gain ? Ou bien pouvez vous exhiber une stratégie mixte de J1 qui lui donne un gain moyen supérieur à tout choix de ligne prévisible par J2 ?

Ex.3. J1 et J2 jouent à un jeu avec un continuum de stratégies où J1 choisit un nombre réel entre -1 et 1 et J2 un nombre réel entre 1 et 3.
On connait les ensembles de meilleures réponses de J1 et de J2 :
- Les meilleures réponses de J1 au choix de y par J2 sont les $x \in [-1, 1]$ vérifiant $2x^2 + 1 = y$.
- Les meilleures réponses de J2 au choix de x par J1 sont les $y \in [1, 3]$ vérifiant $(y - \frac{1}{2}x - \frac{3}{2})(y + \frac{1}{2}x - \frac{5}{2}) = 0$.



a. D'après le dessin, si J2 choisit 2, quelle sera la ou les meilleure(s) réponse(s) de J1 approximativement ?
b. Déduit on du dessin l'existence d'équilibres du jeu ? Si oui, pour quelles valeurs de (x, y) approximativement ?

L2 jeux
Corr Int 1 18 dec 24

Ex 1. $\begin{pmatrix} (0,0) & (1,-1) \\ (1,-1) & (0,0) \end{pmatrix}$ jeu à deux joueurs à somme nulle ; J1 choisit la ligne, J2 choisit la colonne
⇝ (gain de J1, gain de J2)

Par inspection chaque position est regretté par l'un des joueurs. Ou bien pas d'intersection des correspondances de meilleures réponses

$\begin{matrix} 0 & \boxed{1} \\ \boxed{1} & 0 \end{matrix}$

□ : meilleures réponses de J1 à la colonne jouée par J2
○ : ——— J2 à la ligne ——— J1

donc pas d'équilibre

Ex2 a. c_4 est strictement dominée par c_1

Si $x > 0$ e_4 est strictement dominée par e_2 et e_3 est strict^t dominée par e_1. On obtient

	c_1	c_2	c_3
e_1	$(\frac{1}{3}x - \frac{2}{3}, \frac{1}{3})$	$(\frac{1}{3}x - \frac{2}{3}, \frac{1}{3})$	$(\frac{1}{3}x, 0)$
e_2	$(x - \frac{2}{3}, \frac{1}{3})$	$(x, -\frac{1}{3})$	$(x - \frac{2}{3}, \frac{2}{3})$

. Ça s'arrête là si $0 < x \leq 1$

Si $x > 1$ alors e_1 est strictement dominée par e_2. Après élimination de e_1 c_1 et c_2 sont strictement dominées par c_3 ⇝ reste e_2 $\overset{c_3}{(x - \frac{2}{3}, \frac{2}{3})}$

Si $x < 0$ e_2 est strict^t dominée par e_4, e_1 est strict^t dominée par e_3 et on obtient

	c_1	c_2	c_3
e_3	$-\frac{2}{3}, \frac{1}{3}$	$-\frac{2}{3}, \frac{2}{3}$	$0, -\frac{1}{3}$
e_4	$\frac{2}{3}x - \frac{2}{3}, \frac{1}{3}$	$\frac{2}{3}x, 0$	$\frac{2}{3}x - \frac{2}{3}, \frac{1}{3}$

. Ça s'arrête là si $-1 \leq x < 0$

Si $x < -1$ e_4 est strict^t dominée par e_3. Après élimination de e_4 c_1 et c_3 sont strict^t dominées par c_2
⇝ reste e_3 $\overset{c_2}{(-\frac{2}{3}, \frac{2}{3})}$

Si $x = 0$ c_1 n'est pas strict^t dominée et le gain de J1 si J2 joue c_1 est indépendant de la ligne choisie ⇝ pas de stratégie strict^t dominée parmi $e_1 - e_4$, $c_1 - c_3$

b. $x = \frac{1}{3}$ ⇝

	c_1	c_2	c_3
e_1	$-\frac{5}{9}, \frac{1}{3}$	$-\frac{5}{9}, \frac{1}{3}$	$\boxed{\frac{1}{3}, 0}$
e_2	$\boxed{-\frac{1}{3}, \frac{1}{3}}$	$\boxed{\frac{1}{3}, -\frac{1}{3}}$	$-\frac{1}{3}, \frac{2}{3}$

○ : meilleures réponses de J2 à la ligne choisie par J1
□ : ——— J1 colonne J2

pas de position à la fois □ et ○ ⇝ pas d'équilibre

$x = \frac{4}{3}$ ⇝ e_2 $\overset{c_3}{(\frac{2}{3}, \frac{2}{3})}$ forcement équilibre (il n'y a pas de choix après élimination successive des stratégies strict^t dominées)

$x = 1$ ⇝

	c_1	c_2	c_3
e_1	$-\frac{1}{3}, \frac{1}{3}$	$-\frac{1}{3}, \frac{1}{3}$	$\boxed{\frac{1}{3}, 0}$
e_2	$\boxed{\frac{1}{3}, \frac{1}{3}}$	$1, -\frac{1}{3}$	$\boxed{\frac{1}{3}, \frac{2}{3}}$

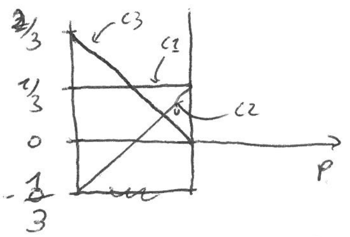
(e_2, c_3) est le seul équilibre

Ex2 c $x = \frac{1}{3}$ Si J1 joue de façon prévisible (J2 devine son choix) alors J2 peut jouer une meilleure réponse au choix de J1 [et alors J1 regrette son choix]. Précisément J1 obtient $-\frac{5}{9}$ s'il joue e1 de façon prévisible par J2, $-\frac{1}{3}$ s'il joue e2 de façon prévisible. Quitte à jouer de façon prévisible, J1 a intérêt à jouer e2

Si J1 joue e1 avec proba (ou fréquence) p et e2 avec proba 1-p la matrice des gains est alors

	c1	c2	c3
e1 p, e2 1-p	$-\frac{5}{9}p - \frac{1}{3}(1-p), \frac{1}{3}$	$-\frac{5}{9}p - \frac{1}{3}(1-p), \frac{1}{3}p - \frac{1}{3}(1-p)$	$\frac{1}{9}p - \frac{1}{3}(1-p), \frac{2}{3}(1-p)$

La meilleure réponse de J2 dépend a priori de p. On compare les gains de J2 lorsqu'il joue c1, c2 ou c3 selon p



La meilleure réponse de J2 est donc
c3 si $0 \leq p < \frac{1}{2}$ ⇝ gain de J1 $= \frac{1}{9}p - \frac{1}{3}(1-p)$
c1, c3 si $p = \frac{1}{2}$ ⇝ $-\frac{4}{9}$ ou $-\frac{1}{9}$ si $p = \frac{1}{2}$
c1 si $\frac{1}{2} < p < 1$ ⇝ $-\frac{5}{9}p - \frac{1}{3}(1-p)$ si $\frac{1}{2} < p \leq 1$
c1, c2 si $p = 1$

Pour $0 < p < \frac{1}{2}$ J1 obtient mieux ~~que~~ en jouant de façon prévisible la stratégie mixte $(p, 1-p)$ qu'en jouant de façon prévisible e1 ou e2, mais il risque le gain $-\frac{5}{9}p - \frac{1}{3}(1-p) < -\frac{1}{3}$ si J2 joue c1, autrement dit la stratégie mixte $(p, 1-p)$ n'est pas prudente pour J1 (Attention : le jeu n'est $p>0$ pas à somme nulle !)

Ex3 a Si J2 choisit $y = 2$, les meilleures réponses de J1 sont les $x \in [-1, 1]$ tels que $(x, 2)$ est sur la parabole, donc approximativement $x = -0{,}7$ et $x = 0{,}7$ (la parabole est symétrique par rapport à l'axe des y)

b Les équilibres sont les couples (x, y) où x est meilleure réponse à y et y meilleure réponse à x donc les points de coordonnées (x, y) à l'intersection des deux graphes.
On lit sur le dessin les points $(-1\,;3)$, $(-0{,}4\,;1{,}3)$, $(0{,}65\,;1{,}81)$, $(0{,}75\,;2{,}12)$ approximativement.

L2jeux - examen - 10 jan 25

Durée 2h, documents et matériel électronique interdits. Les exercices sont indépendants entre eux. Justifiez raisonnablement vos réponses.

Q. On considère un jeu simultané à deux joueurs J1, J2 avec des ensembles de stratégies X pour J1 et Y pour J2 et des fonctions de gain de chaque joueur $g_i : X \times Y \to \mathbb{R}$, $i = 1, 2$.

1 **a.** Qu'est ce précisément (donner une formule) qu'une stratégie prudente de J1 ?

1 **b.** Qu'est ce qu'une meilleure réponse de J1 à une stratégie donnée de J2 ?

1+1 **c.** Supposons que (x, y) est un équilibre du jeu. La stratégie x est elle forcément une meilleure réponse de J1 à y ? Peut on remplacer x par n'importe quelle autre meilleure réponse ? Illustrer par un exemple de jeu matriciel.

Ex.1. *Prévisible ou pas* — On considère le jeu à deux joueurs à somme nulle de matrice :

$$\begin{pmatrix} 4 & 0 \\ 3 & 3 \\ 0 & 5 \end{pmatrix}.$$

(*i.e.* J1 choisit la ligne, J2 choisit la colonne, le nombre indiqué est le paiement de J1.)

1+1 **a.** Le jeu admet il un équilibre en stratégie pure ? Peut on en déduire qu'à l'équilibre aucun des joueurs ne jouera une stratégie pure de façon prévisible par l'autre joueur ?

2 **b.** Déterminer les stratégies mixtes prudentes de J2 (*i.e.* prudente pour l'extension mixte du jeu).

1,5+1 **c.** Quelles sont les meilleures réponses de J1 (en stratégie mixte) aux stratégies mixtes calculées en (b) ? Obtient on des équilibres de l'extension mixte du jeu ?

1+0,5 **d.** J1 peut il jouer une ligne de façon prévisible pour J2 sans nuire à son gain moyen ? J2 peut il jouer une colonne de façon prévisible pour J1 sans nuire à son gain moyen ?

Ex.2. *L'insatiabilité jusqu'au gouffre* — Une variante du jeu de la quiche conduit au jeu matriciel suivant, où J1 choisit la ligne et J2 la colonne et où l'issue est donnée sous la forme du couple (gain de J1, gain de J2) :

	$c1$	$c2$	$c3$	$c4$
$l1$	$(-\frac{5}{8}, \frac{1}{2})$	$(-\frac{5}{8}, \frac{1}{2})$	$(\frac{1}{8}, 0)$	$(\frac{1}{8}, 0)$
$l2$	$(-\frac{1}{4}, \frac{1}{2})$	$(\frac{1}{2}, -\frac{1}{4})$	$(-\frac{1}{4}, \frac{3}{4})$	$(-\frac{1}{2}, 0)$
$l3$	$(-\frac{3}{4}, \frac{1}{2})$	$(-\frac{3}{4}, \frac{3}{4})$	$(0, -\frac{1}{4})$	$(0, 0)$
$l4$	$(-\frac{3}{8}, \frac{1}{2})$	$(\frac{3}{8}, 0)$	$(-\frac{3}{8}, \frac{1}{2})$	$(\frac{3}{8}, 0)$

1 **a.** Quel jeu obtient on en éliminant les stratégies strictement dominées **successivement** (*i.e.* le jeu obtenu n'a plus de stratégie strictement dominée).

0,5 Change t-on ainsi les équilibres du jeu ou de son extension mixte ?

1 Quelles sont les stratégies prudentes de J1 pour le jeu initial ? Et pour le jeu obtenu après élimination des stratégies strictement dominées ?

1+1 **b.** Quel gain obtiendrait J1 s'il jouait la ligne l1 de façon prévisible pour J2 (en supposant bien sûr que J2 joue rationnellement) ? Et s'il jouait la ligne l2 de façon prévisible pour J2 ? Y a t-il un (ou des) équilibre(s) ?

1 **c.** Quels sont les gains moyens de J2 selon la colonne qu'il choisit si J1 joue de façon aléatoire l1 avec probabilité p et l2 avec probabilité $(1-p)$) ?

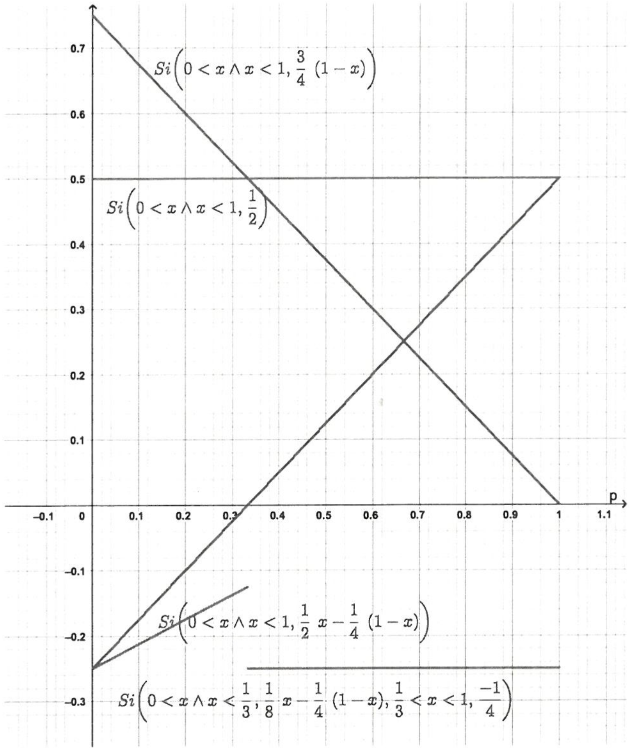
1+0,5 Montrer que la meilleure réponse de J2 à la stratégie mixte de J1 correspondant à $p = 0.2$ est c3. Quel gain moyen obtient alors J1 s'il joue sa stratégie mixte de façon prévisible pour J2 (*i.e* J2 connaît p)?

d. La "calculatrice" indique un seul équilibre pour l'extension mixte du jeu : à l'équilibre J1 joue l1 avec proba $\frac{1}{3}$ et l2 avec proba $\frac{2}{3}$; son gain moyen est alors $-\frac{1}{4}$ (!)

1+(1+) Quel est le gain moyen de J2 à l'équilibre ? Quelle stratégie mixte joue J2 à l'équilibre ?

1 **e.** Pourquoi J1 ne joue t-il pas $p = 0.2$ qui donnerait des gains moyens strictement meilleurs à la fois à J1 et à J2 que ceux obtenus à l'équilibre ?

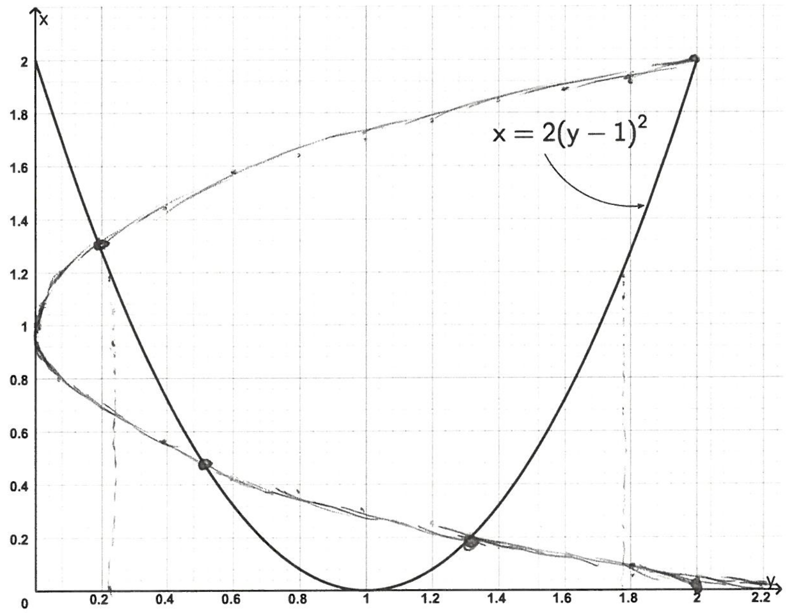
Indications graphiques :



Ex.3. *Regarder de travers !* — J1 et J2 jouent à un jeu avec un continuum de stratégies : ils choisissent tous deux un nombre réel entre 0 et 2. On connait les ensembles de meilleures réponses de J1 et de J2 :

- Les meilleures réponses de J1 au choix de y par J2 sont les $x \in [0, 2]$ vérifiant $2(x-1)^2 = y$.
- Les meilleures réponses de J2 au choix de x par J1 sont les $y \in [0, 2]$ vérifiant $2(y-1)^2 = x$.

On représente ci-dessous le graphe des meilleures réponses de J2 avec x en ordonnée et y en abscisse ; celui pour J1 est analogue.



pts remarquables de $y = 2(x-1)^2$:

$x = 1, y = 0$

$x = 0, y = 2$

$x = 2, y = 2$

Les pts d'intersections sont $(x, y) = (2, 2)$ et approximativement $(x, y) = (1,3 ; 0,2)$

$(0,5 ; 0,5)$

$(0,2 ; 1,3)$

1 **a.** D'après le dessin, si J1 choisit $x = 1.2$, quelle sera la ou les meilleure(s) réponse(s) de J2 approximativement ? (Donnez une valeur décimale approchée à 0.04 près.)

2 **b.** Déduit on avec le graphique l'existence d'équilibres du jeu ? Si oui, pour quelles valeurs de (x, y) approximativement ? Expliquez !

Au besoin vous pouvez compléter le graphique sur le sujet et joindre le sujet à votre copie.

Ex.4. — *Bonus*

1 **a.** Choisissez un nombre entier N entre 0 et 10 et écrivez le sur votre copie `N=...`. Vous obtiendrez un gain (pour de vrai !) suivant la règle qui suit :

Bonus de $\frac{1}{5}N$ points à votre note d'examen si $N \in [-1 + \frac{1}{2}\bar{N}, 1 + \frac{1}{2}\bar{N}]$ où $\bar{N}$ est la moyenne des valeurs de N que le correcteur relèvera sur les copies (les copies sans valeur pour N ne comptent pas).

2 **b.** Auriez vous intérêt (si c'était possible !) à vous mettre d'accord entre vous sur la valeur de N que vous allez écrire ? Si oui, sur quelle valeur de N ? Expliquez !

Q $g_i : X \times Y \to \mathbb{R}$ $i = 1,2$

choix de J1 ↑ ↑ choix de J2

a. x_0 maximisant $x \mapsto \min\limits_{y \in Y} g_1(x,y)$

b. x_0 maximisant $x \mapsto g_1(x,y)$

c. (x,y) équilibre $\Leftrightarrow$ x meilleure réponse à y et y meilleure réponse à x donc oui

Si on change x, y n'est peut être plus une meilleure réponse

exemple $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$ jeu matriciel à somme nulle. $(l2, c1)$ est un équilibre, $l1$ est aussi une meilleure réponse à $c1$ mais $(l1, c1)$ n'est pas un équilibre, ni $(l1, c2)$

Ex 1 a) $\begin{pmatrix} 4 & 0 \\ 3 & 3 \\ 0 & 5 \end{pmatrix}$

○ : meilleure réponse de J1 au choix de J2

□ —— J2 —— J1

cf séance du 11 déc. sur Moodle

Pas d'intersection ⇝ pas d'équilibre

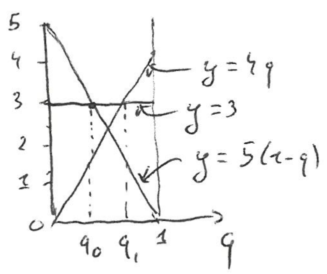
J2 ne peut pas jouer $c1$ ou $c2$ de façon prévisible sinon il regrette après la meilleure réponse de J1

J1 —— $l1$ ou $l3$ —— —— J2

Pour $l2$ l'argument ci-dessus ne s'applique pas. Voir plus loin.

b) Si J2 joue $(q, 1-q)$ avec $q \in [0,1]$ il craint | la plus grande perte moyenne $\max\{4q, \underbrace{3q + 3(1-q)}_{=3}, 5(1-q)\}$ | la meilleure réponse de J1

dessin :



Le dessin indique $5(1-q) > 3 > 4q$ pour $q \in [0, q_0[$ q_0 tq $5(1-q_0) = 3$ ⇝ $q_0 = \frac{2}{5}$

$3 > 5(1-q), 4q$ pour $q \in]q_0, q_1[$

$4q > 3 > 5(1-q)$ pour $q \in]q_1, 1]$. q_1 tq $4q_1 = 3$ ⇝ $q_1 = \frac{3}{4}$

$(q, 1-q)$ est prudente si elle minimise cette plus grande perte moyenne donc si $q \in [q_0, q_1] = [\frac{2}{5}, \frac{3}{4}]$ garantissant une perte au plus 3

c) • Meilleures réponses de J1 à $(q, 1-q)$ lorsque celle-ci est prudente pour J2 : celles qui donnent justement la plus grande perte à J2 donc $l2$ si $q \in]\frac{2}{5}, \frac{3}{4}[$; $l2$ ou $l3$ donc n'importe quelle combinaison des deux, c'est à dire les stratégies mixtes $(0, p, 1-p)$, $p \in [0,1]$ si $q = \frac{2}{5}$; $l1$ ou $l2$ donc $(p, 1-p, 0)$, $p \in [0,1]$ si $q = \frac{3}{4}$

• On sait que les équilibres de l'extension mixte sont les couples de stratégies prudentes donc les $((p_i), (q, 1-q))$ avec $q \in [\frac{2}{5}, 3$ et (p_i) prudent. On sait aussi que (p_i) est une meilleure réponse à $(q, 1-q)$. Si $q \in]\frac{2}{5}, \frac{3}{4}[$ il n'y a pas le choix $(p_i) = (0, 1, 0)$ est la seule meilleure réponse.

Si $q = \frac{2}{5}$ les meilleures réponses $(0, p, 1-p)$, $p \in [0,1]$ ne sont peut être pas toutes prudentes ; par exemple $(0, 0, 1)$ n'est pas prudent d'après (a). Idem si $q = \frac{3}{4}$.

En fait $(0, p, 1-p)$ est prudent (pour J1) s'il garantit le gain 3 = perte optimale garantie pour J2, donc si $3p \geq 3$ et $3p + 5(1-p) \geq 3$ ⇝ $p = 1$

De même $(p, 1-p, 0)$ est prudent si $4p + 3(1-p) \geq 3$ et $3(1-p) \geq 3$ ⇝ $p = 0$. Conclusion $l2$ est la seule stratégie mixte prudente de J1

{Ex 1-d}   Florpeu

Ex1d   le choix de $\ell 2$ par J1 est prévisible puisque c'est la seule stratégie prudente de J1. Cela complète la réponse de la question (a)

En (a) on a déjà expliqué que J2 ne peut pas jouer c1 ou c2 de façon prévisible sans le regretter.

Ex2   cf intro - ex2

a c_4 est strict^t dominé par c_1 (gain de J2 $\frac{1}{2}$ contre 0)

ℓ_3 ——— ℓ_1 (gain de J1 $-\frac{5}{8} > -\frac{3}{4}$, $\frac{1}{8} > 0$)

On obtient

	c_1	c_2	c_3
ℓ_1	$(-\frac{5}{8}, \frac{1}{2})$	$(-\frac{5}{8}, \frac{1}{2})$	$(\frac{1}{8}, 0)$
ℓ_2	$(-\frac{1}{4}, \frac{1}{2})$	$(\frac{1}{2}, -\frac{1}{4})$	$(-\frac{1}{4}, \frac{3}{4})$
ℓ_4	$(-\frac{3}{8}, \frac{1}{2})$	$(\frac{3}{8}, 0)$	$(-\frac{3}{8}, \frac{1}{2})$

Maintenant ℓ_4 est strict^t dominée par ℓ_2

Il reste ℓ_1, ℓ_2 , c_1, c_2, c_3

une stratégie strict^t dominée ne sera jamais une meilleure réponse, même en stratégie mixte (mieux vaut la remplacer par une stratégie qui la domine strict^t; donc on ne change pas les équilibres du jeu en enlevant les stratégies strict^t dominées.

Voici ce que risque J1 selon les lignes qu'il choisit

ℓ_1	ℓ_2	ℓ_3	ℓ_4
$-5/8$	$-3/2$	$-3/4$	$-3/8$

le moins risqué est $-3/8$ c'est donc ℓ_4 stratégie prudente pour le jeu initial.

Après élimination de c_4, ℓ_3, ℓ_4 le risque devient

ℓ_1	ℓ_2
$-\frac{5}{8}$	$-1/4$

$\ell 2$ devient la stratégie prudente.

b   La meilleure réponse de J2 à $\ell 1$ est c_2 ou c_3 qui donnent le même gain $-\frac{5}{8}$ à J1
$\ell 2$ est c_3 qui donne le gain $-\frac{1}{4}$ à J1

Dans les deux cas J1 regrette son choix donc il n'y a pas d'équilibre (en stratégies pures)

c   Si J1 joue $\ell 1$ avec proba p, $\ell 2$ avec proba $1-p$, J2 obtient $\frac{1}{2}p + \frac{1}{2}(1-p) = \frac{1}{2}$ en jouant c1
$\frac{1}{2}p - \frac{1}{4}(1-p)$ en jouant c2
$3/4\,(1-p)$ en jouant c3

Pour $p = 0{,}2$ les gains moyens de J2 sont $\frac{1}{2} = 0{,}5$; $-0{,}1$; $0{,}6$ respectivement. La meilleure réponse de J2 est alors c_3 et J1 obtient $\underbrace{\frac{1}{8} \times 0{,}2}_{0{,}025} - \underbrace{\frac{1}{4} \times 0{,}8}_{0{,}2} = -0{,}175$

d   A l'équilibre J1 joue ℓ_1 avec proba $\frac{1}{3}$, ℓ_2 avec proba $2/3$; J2 joue forcément une meilleure réponse.
Or c_1 donne à J2 $\frac{1}{2} \times \frac{1}{3} + \frac{1}{2} \times \frac{2}{3} = \frac{1}{2}$; c_2 donne $\frac{1}{2} \times \frac{1}{3} - \frac{1}{4} \times \frac{2}{3} < \frac{1}{2}$; c_3 donne $\frac{3}{4} \times \frac{2}{3} = \frac{1}{2}$.
Conclusion les meilleures réponses de J2 sont c_1 et c_3 ou toute combinaison des deux $(q, 0, 1-q)$ $q \in [0,1]$ ce qui donne $\frac{1}{2}$ à J2
Pour que $((\frac{1}{3}, \frac{2}{3}), (q, 0, 1-q))$ soit un équilibre il faut que J1 ne regrette pas son choix. Par exemple J1 regrette de ne pas jouer $(1,0) \leftrightarrow \ell 1$ si J2 choisit $(0,0,1) \leftrightarrow c_3$.
Si J2 joue $(q, 0, 1-q)$ J1 obtiendrait
$-5/8\,q + \frac{1}{8}(1-q)$ en jouant ℓ_1
$-1/4\,q - \frac{1}{4}(1-q) = -\frac{1}{4}$ en jouant ℓ_2
Il faut donc $-\frac{5}{8}q + \frac{1}{8}(1-q) = -\frac{1}{4}$ pour que J1 ne regrette pas $(\frac{1}{3}, \frac{2}{3})$
$\Leftrightarrow q = \frac{1}{2}$

Ex2.e $(0,2\,;\,0,8)$ et la meilleure réponse de J2 donnent un meilleur gain à J1 $(-0,175)$ et à J2 $(0,6)$ que l'équilibre $\left(\left(\frac{1}{3},\frac{2}{3}\right),\left(\frac{1}{2},\frac{1}{2}\right)\right)$ mais J1 obtient mieux en choisissant $p \in]0,2\,;\,\frac{1}{3}[$ (et J2 obtient moins mais il n'y peut rien). Toute stratégie $(p, 1-p)$ avec $p \in [0, \frac{1}{3}[$ est regrettée par J1 puisque la meilleure réponse de J2 à $(p,1-p)$ avec $p < \frac{1}{3}$ est c_3 et que la meilleure réponse de J1 à c_3 est ℓ_1. L'instabilité pousse J1 à $p = \frac{1}{3}$

Ex3 a) voir dessin. Le quadrillage est de pas $0,2/5 = 0,04$. Pour $x = 0,2$ le quadrillage indique $y = 0,24$ et $1,76$ à $0,04$ près.

b) On reporte sur le dessin la courbe d'équation $y = 2(x-1)^2$, symétrique par rapport à la diagonale $y = x$ de la branche de parabole déjà représentée.

Les équilibres sont les couples (x,y) où x est meilleure réponse à y et y meilleure réponse à x, donc les coordonnées des points d'intersection des deux courbes.

Sur le dessin on trouve $(x,y) = (2,2)$ et approximativement $(1,3^*;\,0,2)$, $(0,5\,;\,0,5)$, $(0,2\,;\,1,3)$

Ex4 a On veut choisir N proche de $\frac{1}{2}\bar{N}$. On a assurément $\bar{N} \leq 10$ donc $N \leq 5 + \underbrace{1}_{\text{marge permise}}$.

Si tout le monde observe cette majoration alors $\bar{N} \leq \underbrace{5+1}_{=6}$ donc $N \leq 3+1$

A nouveau si tout le monde a fait ce raisonnement $\bar{N} \leq 4$ d'où $N \leq 2+1$ puis $\bar{N} \leq 3$ puis $N \leq 1,5+1$ puis..

La limite est N tq $N = \frac{1}{2}N + 1$ donc $N = 2$. C'est le meilleur choix si tout le monde raisonne correctement, et sinon ...

b On a intérêt à se mettre à l'unisson sur $N = 2$: cela garantit un gain de $\frac{2}{5}$ pour tout le monde et personne n'a intérêt à s'en écarter unilatéralement, & donc au passage c'est un équilibre du jeu ; on peut même se convaincre que c'est le seul.