

Durée prévue : deux heures

*Justifiez correctement chaque réponse.**Retour sur le jeu des deux généraux.*

1. Suivant le nombre de compagnies placées par les généraux A et B sur les routes menant à la ville, le général A obtient un gain (modélisant sa satisfaction à l'issue de la bataille) donnée par la matrice suivante :

$$\begin{pmatrix} -1 & -1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & -1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & -1 & -1 \end{pmatrix}$$

où l'indice de ligne correspond au choix fait par A et l'indice de colonne au choix fait par B. Le général B obtient le gain opposé à celui de A.

- Le général A possède-t-il des stratégies dominées (pour le jeu initial) ? Si oui précisez pour chaque stratégie dominée une stratégie qui la domine.
- Même question pour le général B.
- Quelle matrice de paiement obtient-on après élimination successive des stratégies dominées ?
- Le jeu initial admet-il un équilibre ? Si oui le(s)quel(s) ?
- Si le général A laisse entendre au général B qu'il va jouer la ligne 1, quel choix B a-t-il intérêt à faire ? Comment A peut-il réagir à ce choix prévisible de B ? B regrette-t-il alors de s'être laissé convaincre que A jouerait la ligne 1 ?

Pouvez-vous commenter cette suite de questions ?

2. On considère le jeu à deux joueurs à somme nulle suivant : $X = Y = [0, 1]$, $g(x, y) = -4xy + 2x + 2y - 1$.

- Calculez $\inf_{y \in Y} g(x, y)$ en fonction de x puis $\sup_{x \in X} \left(\inf_{y \in Y} g(x, y) \right)$.
- Déterminez les stratégies prudentes du joueur 1 et son gain garanti optimal.
- Le jeu admet-il un équilibre ? Si oui le(s)quel(s) ?

3. On considère le jeu à somme nulle de matrice de paiement

$$\begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}.$$

- Calculez le gain moyen (ou "espérance de gain") du joueur 1 s'il joue la stratégie mixte $(\frac{1}{3}, \frac{2}{3})$ et si le joueur 2 joue la stratégie mixte $(1, 0)$.
- Quel est le plus mauvais gain moyen craint par le joueur 1 s'il joue la stratégie mixte $(\frac{1}{3}, \frac{2}{3})$?
- Quelles sont les stratégies mixtes prudentes du joueur 1 ? Quel est son gain moyen garanti optimal ?
- Quelles sont les stratégies mixtes prudentes du joueur 2 ?
- L'extension mixte du jeu admet-elle un équilibre ? Si oui le(s)quel(s) ?

4. (Suite de l'exercice 3.) On considère le jeu à somme nulle de matrice de paiement

$$\begin{pmatrix} -1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 \end{pmatrix}.$$

- a. Montrez que la stratégie mixte $(0, 1, 0)$ du joueur 2 est strictement dominée dans l'extension mixte du jeu.
- b. Soit (α, β, γ) une stratégie mixte dominant strictement $(0, 1, 0)$ (vous pouvez préciser α, β, γ). Montrez que toute stratégie mixte (q_1, q_2, q_3) du joueur 2 telle que $q_2 > 0$ est strictement dominée par la stratégie mixte $q_2(\alpha, \beta, \gamma) + (q_1, 0, q_3)$ (vérifiez que cette dernière est bien une stratégie mixte).
- c. Que peut on en déduire quant aux équilibres de l'extension mixte du jeu ?
- 5.** Exhibez en justifiant vos calculs un équilibre pour l'extension mixte du jeu des deux généraux (dont la matrice de paiement a été donnée dans l'exercice 1)

Si le général A choisit de jouer une stratégie mixte prudente, a-t-il intérêt de cacher celle-ci au général B ?

6. *Une diversion*

Le général B dispose d'une stratégie conduisant au jeu dont la matrice de paiement (de A) est

$$\begin{pmatrix} -1 & 1 & 0 \\ 1 & -1 & -\frac{1}{2} \end{pmatrix}.$$

Quelles sont les stratégies mixtes prudentes de A ? quel est son gain moyen garanti optimal ?