

Durée : une heure – calculatrice et documents interdits

*Justifier correctement chaque réponse.*

1. On considère le jeu à somme nulle à deux joueurs de matrice de paiement

$$\begin{pmatrix} 2 & -5 & 1 & 4 & 2 & 0 & 4 \\ -4 & 0 & 0 & -3 & 2 & -1 & 0 \\ 1 & -2 & -2 & -4 & 1 & 3 & 4 \\ 2 & 1 & 0 & 1 & 2 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & -2 & 1 & 6 & 4 & -1 \end{pmatrix}$$

- Combien de stratégies a le joueur 1 ? Combien de stratégies a le joueur 2 ?  
Quel est le gain du joueur 2 si la ligne 2 colonne 4 est jouée ?
- Quelles sont les stratégies dominées du joueur 1 et du joueur 2 ?
- Quel jeu obtient-on après l'élimination successive des stratégies dominées ?
- Ce dernier jeu admet-il un équilibre ?

2. Soit le jeu à somme nulle à deux joueurs de matrice de paiement

$$\begin{pmatrix} a & -1 & 1 \\ 1 & 2 & a \end{pmatrix}$$

où  $a$  est un paramètre réel.

- On fixe  $a = 0$ . Montrer que le couple de stratégies (2, 3) (ligne 2, colonne 1) est un couple de stratégies prudentes. Est-ce un équilibre ?
- Quel est le gain garanti optimal du joueur 1 et la majoration optimale de la perte du joueur 2 en fonction de  $a$  ?
- Pour quelles valeurs de  $a$  le jeu admet-il un équilibre ? (Expliquez votre méthode.)
- Quels sont les équilibres lorsque le jeu admet un équilibre ?

3. On considère un jeu à deux joueurs à somme nulle. On note  $g : X \times Y \rightarrow \mathbb{R}$  la fonction de paiement du premier joueur. Le premier joueur a choisi une stratégie  $x_0$ , le second une stratégie  $y_0$ .

- On suppose  $g(x_0, y_0) > \sup_{x \in X} \left( \inf_{y \in Y} g(x, y) \right)$ . L'un des joueurs regrette-t-il son choix ? Lequel ?
- Mêmes questions si  $g(x_0, y_0) > \inf_{y \in Y} \left( \sup_{x \in X} g(x, y) \right)$ .