Licence L2 MASS - option Théorie des jeux feuille 1 2 octobre 2009

On représente ci-dessous des jeux à deux joueurs sous forme normale en donnant la matrice des paiements (ou gains) des deux joueurs, ou, lorsque le jeu est à somme nulle, celle des paiements du premier joueur. Une stratégie d'un joueur donné est prudente si elle minimise la perte à laquelle s'expose le joueur. Un point selle est un couple de stratégies correspondant à un équilibre du jeu.

1. Pour quelles valeurs de v la stratégie 3 du joueur 1 est-elle prudente ? Pour quelles valeurs de v la stratégie 1 du joueur 2 est-elle prudente ?

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 1 \\ v & 2 \end{pmatrix}$$

2. Pour les jeux suivants indiquer les stratégies (pures) prudentes de chaque joueur. Si chacun des joueurs jouent prudemment, regrettent-ils a posteriori leur choix de stratégie ?

$$\begin{pmatrix} (3,3) & (-1,2) \\ (2,-1) & (0,0) \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} (3,3) & (-1,2) \\ (2,1) & (0,0) \end{pmatrix}.$$

Les joueurs gagnent-ils à jouer prudemment ?

3. Mêmes questions avec les jeux suivants

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & -7 \\ 3 & 8 & 6 & -2 \\ -1 & 2 & 7 & 3 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 3 & 4 & 5 \\ 2 & 0 & 1 \\ -1 & -4 & 3 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} a & a^2 \\ 1 & -2 \end{pmatrix} \text{ en fonction de } a,$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & a \\ a & 4 & 3 \end{pmatrix} \text{ en fonction de } a.$$

4. Les jeux à somme nulle des exercices 1 et 3 admettent-ils une valeur ? Si oui quels sont les équilibres ?

5. On considère le jeu à deux joueurs à somme nulle suivant : $X = [0,1]$, $Y = [1,+\infty[$, $g(x,y) = \frac{x}{y}$. Le jeu admet-il une valeur ? un équilibre de Nash ?

6. On considère le jeu à deux joueurs à somme nulle suivant : $X = Y = [0,1]$, $g(x,y) = x + y - 1$ (paiement du premier joueur). Calculer g et $\bar{g}$. Y a t-il un équilibre ? Quelle est alors la valeur du jeu ?

Même question pour $g(x,y) = 1 - (x-y)^2$ puis pour
$$\begin{aligned} g(x,y) &= 2x-1 \text{ si } x<y \\ &= 1-2y^2 \text{ si } x>y \\ &= x-y^2 \text{ si } x=y \end{aligned}$$

7. Soit le jeu de matrice de paiement

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 & 2 & 5 & 7 & 0 \\ 3 & -4 & -2 & 5 & 1 & 3 & 5 \\ 2 & -1 & -1 & -3 & 4 & 2 & 5 \\ -3 & 1 & 1 & -2 & 0 & 3 & 1 \\ 3 & 1 & 1 & 2 & 5 & 3 & 1 \end{pmatrix}$$

Ce jeu admet-il une valeur ? Si oui quelles sont les stratégies optimales de chaque joueur ?

8. Pour chacune des conditions suivantes construire un jeu à somme nulle à deux joueurs, chacun des joueurs ayant 5 stratégies, satisfaisant la condition énoncée.

a) Il n'y a aucun point selle.

b) Il y a exactement un point selle.

c) Il y a exactement deux points selle.

d) Il y a exactement six points selle.

e) Il y a exactement sept points selle.

9. Soit $(X, Y, g : X \times Y \to \mathbb{R})$ un jeu à deux joueurs à somme nulle admettant une valeur. Soit (x, y) un couple de stratégies vérifiant $g(x, y) = \mathrm{g} = \bar{g}$. Le couple (x, y) est-il nécessairement un équilibre du jeu ?